译 者 序

本书作者 W.T.Thomson 是美国加州大学机械工程教授。他的第一本教程《Mechanical Vibrations》于1948年出版，以后又多次重印。1965年作者作了较大修改并以《Vibration Theory and Applications》书名再版。1966年以后该书在英国出版，到1976年共重印五次。但从最近一次重印版看，内容与1965年美国出版的相同。

这本《Theory of Vibration with Applications》是作者在上书基础上重新编写的另一本教程，于1972年在美国出版。本书篇幅比上书增加约20%，原书的基本内容均保留，而对多自由度系统、非线性系统以及拉格朗日方程等章作了较多的增补。对现代技术，如电子数字机的应用等给予了更多的注意，列举了数字例及程序。作者除注意理论的系统性和完整性外，还特别注重工程应用，列举了大量例题和习题，这些问题多数是从工程实践问题中提炼概括出来的。这对于加深理论的理解和熟练应用起了很好的作用。一些难度较大的理论问题通过实例讲解，易使学生掌握要领。我们认为，这是一本适合于大学工程专业的较好的振动理论教科书。前五章是基础部分，可作为工程专业大学生使用；后六章可作为研究生使用或大学生高年级选用。

我们对原书中发现的错、漏之处都已作了改正，一般均不加译注，但没能对全书的所有公式和题解作全面校订。由于译者水平所限，时间又很匆促，译文定有不妥和错误之处，欢迎读者赐教。

本书由下列同志分工翻译：胡宗武（第一、二、三、四、五章）；王焕勇（第六、七章）；孙鸿范（第八、九章）；陈健元（第十、十一章）；张惠侨（附录）。全部译稿由胡宗武校对整

理。译稿完成后又蒙中国矿业学院陈至达同志审校并提出宝贵意见，在此特致以谢意。

译者　于上海交通大学
一九七八年十月

原　序

振动这一学科具有独特的吸引力。它是一门能用力学基本原理进行解释的逻辑学科。和某些学科不同，它的数学概念完全与物理现象相协调，这些物理现象是人们可以体验得到和测量得出的。它是一门可以为大学生们讲授和选读的完备学科。从1948年出版第一本《机械振动》基础教程以来，作者曾力图改进本书的叙述，以便与技术进步和在教学及实践中积累的经验相一致。这些年来许多教师和学生曾提供了许多建议并进行了交流。

对于这本几乎全部重新写过的新教程，作者再次期望尽力用现在已很平凡了的现代技术予以清楚地阐明。在讨论单自由度系统和二自由度系统的前五章中，原教程的简明性被保持了，并期望有所改进。由于数字计算机现在已是一种普遍适用的工具，它在振动领域中的应用通过一些简单例子被引进。尽管数字计算机具有通用性，但模拟计算机仍是一种有用的工具，而且在许多情况下它的适用性已被充分证明。前面五章（它用简单的物理基础处理二自由度系统）构成了理解振动基本课题的知识基础，它可以作为振动的第一教程教半学期或一个学期。

在第六章中，二自由度系统的概念被推广到多自由度系统。这一章的重点是理论，而且借助于矩阵代数学，向多自由度的引伸可以清楚地被阐明。应用矩阵可使所有有关坐标耦合的基础变得很清楚。这里引进了强迫振动中主振型的一些不寻常的概念以及自动控制理论中常用的状态空间方法。

有很多供多自由度复杂结构振动分析用的近似解析方法。第七章叙述了几种较为常用的方法。而且，尽管大多数多自由度系统今天可用数字计算机求解，但是，人们还是需要知道如何对这些问题建立公式以便进行有效计算，以及知道某些可用来对计算

结果进行校核的近似方法。这里，所有问题都能编成计算机程序，但作为计算依据的理论必须理解。这里举例介绍了Holzer型问题的数值计算。

第八章讨论连续系统或与偏微分方程有关的那些问题。用有限差分近似法解梁的问题提供了用数字计算机解这类问题的机会。

包含在第九章中的拉格朗日方程再次加深了对先前阐述过的动力系统的理解，并扩大了人们对其它方面引伸的眼界。例如，振型总和法的重要概念就是拉格朗日广义坐标的自然结果。作为振型总和法物理边界条件之约束方程的含义可以通过拉格朗日理论再次得到合乎逻辑的理解。

第十章讨论由随机力或变位激励的动力系统。这样的问题必须从统计的观点进行考察，而且在很多情况下，随机激励的概率密度是正态分布的。这里所采取的观点是：给出一个随机记录，便可容易地确定自相关，由此就可算出频谱密度和均方响应。对数值运算，数字计算机仍然是必不可少的。

在十一章中，非线性系统的处理着重用相平面法引入。当非线性不大时，摄动法或迭代法提供了一种近似的解析方法。对非线性系统的机器计算结果说明，它能够完成这方面工作。

从第六章到十一章所叙述的学科内容可以适合作为振动的第二教程，可被用于研究生水平学习。

William T. Thomson

目　　录

第一章 振 荡 运 动

1.1 导引

振动的研究涉及到物体的振荡运动以及与此有关的力。所有具有质量和弹性的物体都能产生振动。因此，大多数工程机器和结构都经受某种程度的振动，它们的设计一般要考虑振荡的特性。

振荡系统可大致上区分为线性和非线性两种。对线性系统，叠加原理有效，而且处理这些问题的数学方法已发展得很成熟。相反，分析非线性系统的数学方法并不十分为人们所熟悉，而且应用困难。但非线性系统的一些知识还是必需的，因为所有系统当振荡的振幅增大后均趋向于非线性系统。

振动一般分为两类：自由振动和强迫振动。自由振动是当没有外力作用时由系统固有力作用下产生的。系统在自由振动下具有一个或多个固有频率。固有频率是动力系统的一个特性，它决定于系统质量的分配和刚度的分配。

在外力激励下产生的振动称为强迫振动。当激励是振荡性质时系统将被强制在激励频率下振动。如果激励的频率与系统的一个固有频率相同，则共振条件产生，巨大危险的振荡便可能形成。大型结构，如桥梁、大厦、机翼等在共振下可能发生可怕的损坏。因此，固有频率的计算在振动研究中是非常重要的。

任何振动系统由于能量被摩擦或其他阻力所消耗，因而都受到某种程度的阻尼。如果阻尼很小，则对系统的固有频率的影响很小，因此，在计算系统固有频率时通常是以无阻尼系统为基础的。但另一方面，阻尼对限制共振振幅具有很大影响。

描述系统运动所需的独立坐标数称为系统的自由度。因此一

个自由质点在空间有三个自由度，而一个刚体有六个自由度，即三个位置分量和三个表明位向的角度。一个连续弹性体要求有无穷多的坐标来描述它质点的运动(物体上每一质点要三个坐标)，因此它的自由度是无穷多的。但是，在很多情况下，物体的某些部分可假定是刚体，因此，系统可化成为具有有限个自由度的动力等效系统。事实上，意外地有很多振动问题可简化为单自由度系统来处理而具有足够的准确度。

1.2 谐运动

振荡运动本身可能是有规律的，如钟摆；也表现为无规律的，如地震。当运动经过相等的时间间隔 τ 后又重复出现的运动称为周期运动。重复的时间间隔 τ 称为振荡周期，它的倒数 $f=1/\tau$ 称为频率。如果运动用时间函数 $x(t)$ 表示，则任何周期运动必须满足下面关系式：

$$x(t)=x(t+\tau)$$

不规律的运动，它的出现是没有一定周期的，但它可以看作是由大量的具有不同频率的有规律运动的总和。这种运动的性质可以用统计学方法来描述。这种特性将在以后章节讨论。

周期运动的最简单形式是谐运动。它可以用支持在很轻的弹簧上的质量来演示，如图 1.2-1。如果令质量离开它的静止位置后再释放，它将作上下振荡。在质量上放置一光源，则质量的运动能用一以等速运动的长条形感光带记录下来。

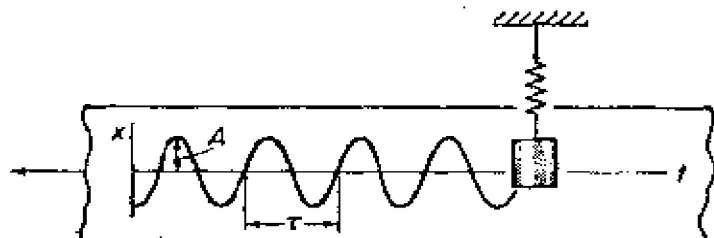


图 1.2-1　谐运动的记录

记录在胶带上的运动可用下式表示：

$$x = A\sin 2\pi\frac{t}{\tau} \qquad (1.2\text{-}1)$$

式中A为振荡的振幅，从质量的平衡位置计起；τ为周期。当$t=\tau$时，运动将重复。

谐运动常用以等速作圆周运动的点在直线上的投影表示，如图1.2-2。以ω表示直线OP的角速度，位移x可写成：

$$x = A\sin\omega t \qquad (1.2\text{-}2)$$

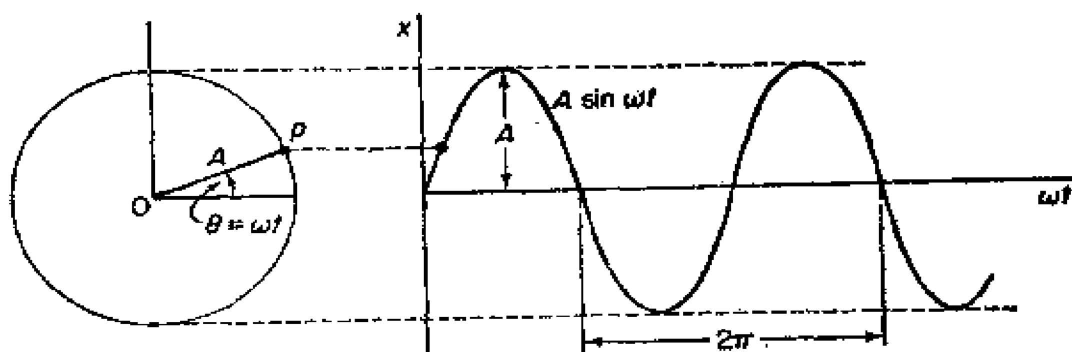


图 1.2-2 谐运动表为圆周上点的投影

ω的单位一般用每秒弧度，并称为圆频率。由于经2π弧度后运动将重复，因此有如下关系：

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f \qquad (1.2\text{-}3)$$

式中τ和f是谐运动的周期和频率，它们的单位一般分别用秒和每秒次数。

对于点的圆周运动，应用虚轴i是很方便的，这时令圆的半径用复矢量z表示，z称为相量。

复矢量z可用下式分为实数和虚数两部分：

$$z = Ae^{i\theta} = A\cos\theta + iA\sin\theta \qquad (1.2\text{-}4)$$

用$\theta=\omega t$来代换，z的分量可表为时间的正弦波函数：

$$\mathrm{Re}\ z = A\cos\omega t$$

$$\mathrm{Im}\ z = A\sin\omega t$$

经常需要研究两个同频率但相差一相位角ϕ的谐运动。这两个运

动可用复矢量表示：

$$z_1 = A_1 e^{i\omega t}$$

$$z_2 = A_2 e^{i(\omega t + \phi)}$$

式中A_1、A_2是实数。第二个复矢量还可进一步改写为：

$$z_2 = A_2 e^{i\phi} e^{i\omega t} = \bar{A}_2 e^{i\omega t} \qquad (1.2\text{-}5)$$

式中 $\bar{A}_2$ 是复数。这种表现形式在包含有谐运动的问题中是经常有用的。

复矢量的加、乘、乘方的运算规则见附录A。把谐运动表为矢量形式，运算很容易。

谐运动的速度和加速度，可简单地从方程（1.2-2）的求导得到。我们用字母加圆点符号表示导数，便得：

$$\dot{x} = \omega A\cos\omega t = \omega A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.2\text{-}6)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\sin\omega t = \omega^2 A\sin(\omega t + \pi) \qquad (1.2\text{-}7)$$

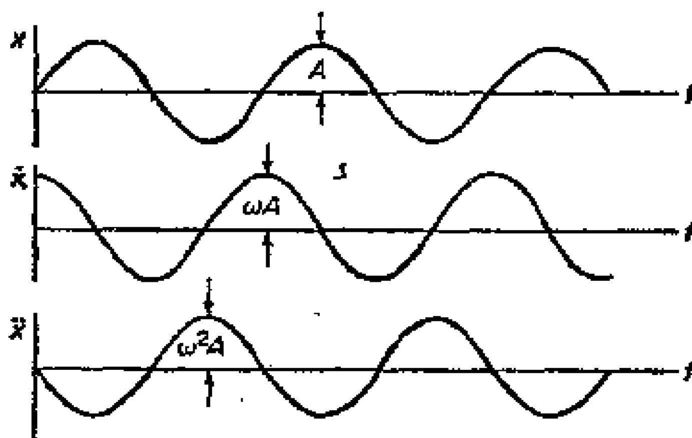


图 1.2-3　在谐运动中速度和加速度比位移导前$\pi/2$和π

由此可知，速度和加速度同样是具有同一频率的谐运动，但相位角比位移分别导前$\pi/2$和π，见图1.2-3。

考察方程（1.2-2）和（1.2-7）便知：

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad (1.2\text{-}8)$$

这说明，在谐运动中，加速度正比于位移而指向原点。牛顿第二

定律指出，加速度正比于作用力，因而，谐运动可认为是具有变化力为 kx 的直线弹簧系统的运动。

1.3 谐分析

同时存在一系列不同频率的振动是很常见的。例如，小提琴弦的振动是由基频 f 及其谐频 $2f$，$3f$…… 等组成的。另一例子是多自由度自由振动系统，在这种振动中，每一固有频率的振动成份均有。这种振动形成复杂波形，并周期性重复，如图1.3-1。

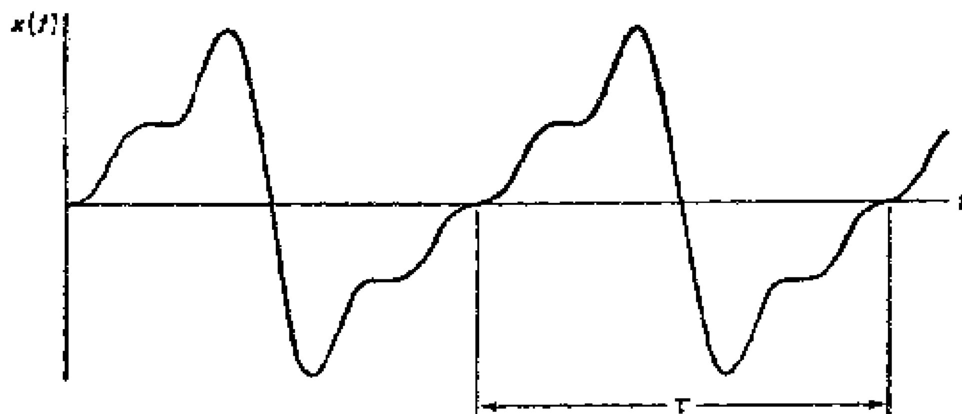


图 1.3-1 复杂的周期运动

法国数学家 J.傅立叶（1768～1830）指出，任何周期运动可表示为正弦和余弦的级数，它们是和谐相关的。如果 $x(t)$是周期为 τ 的周期函数，那么它可以用下列傅立叶级数表示：

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega_1 t+a_2\cos 2\omega_1 t+\cdots\cdots$$

$$+b_1\sin\omega_1 t+b_2\sin 2\omega_1 t+\cdots\cdots \qquad (1.3\text{-}1)$$

式中$\omega_1=2\pi/\tau$为基频。为了确定系数a_n和b_n，我们以$\cos n\omega_1 t$ 或 $\sin n\omega_1 t$ 乘公式（1.3-1）的两边，然后对各项在周期τ内积分。考虑到下列关系：

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos n\omega_1 t\ \cos m\omega_1 t\,dt=\begin{cases}0 & \text{当} m\neq n \text{时}\\ \dfrac{\pi}{\omega_1} & \text{当} m=n \text{时}\end{cases}$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin n\omega_1 t \ \sin m\omega_1 t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{当} m \neq n \text{时} \\ \dfrac{\pi}{\omega_1} & \text{当} m = n \text{时} \end{cases}$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos n\omega_1 t \ \sin m\omega_1 t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{当} m \neq n \text{时} \\ 0 & \text{当} m = n \text{时} \end{cases}$$

上述运算的结果，方程右边除一项外其余各项均为零，于是我们得：

$$a_n = \frac{\omega_1}{\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\cos n\omega_1 t \, dt \qquad (1.3\text{-}2)$$

$$b_n = \frac{\omega_1}{\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\sin n\omega_1 t \, dt \qquad (1.3\text{-}3)$$

现在我们回到公式（1.3-1）考察频率同为$n\omega_1$的两项，它们的和可写成为：

$$\begin{aligned} & a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t \\ & = \sqrt{a_n^2 + b^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos n\,\omega_1 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin n\omega_1 t\right) \\ & = c_n\cos(n\omega_1 t - \phi_n) \end{aligned}$$

式中

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan\phi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

这样，c_n和ϕ_n（或a_n和b_n）完全说明了周期波的谐波组成。

当把c_n和ϕ_n对所有的频率$n\omega_1$画成关系图时，得到了一系列在ω_1，$2\omega_1$，$3\omega_1$……等处出现的离散的直线，这种图称之为**傅立叶波谱**，如图1.3-2。

目前借助数字电子计算机，谱分析可在很短时间内完成。

新近介绍的所谓快速傅立叶变换[1]的计算机语言更进一步缩短了计算时间。

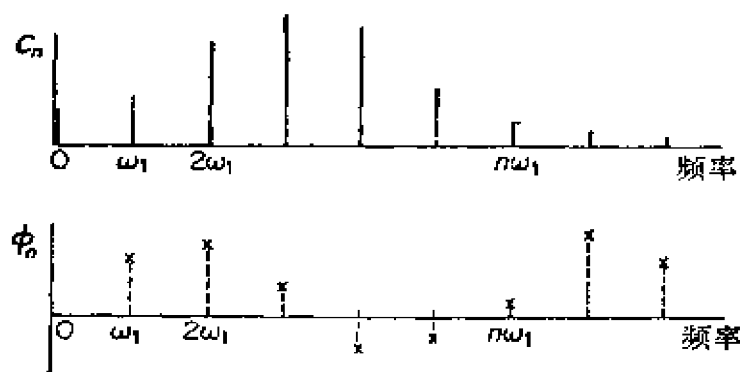


图 1.3-2 周期时间函数的傅立叶谱

1.4 瞬变时间函数

一个只有在有限的时间中存在，在其它时间内均为零的函数称为瞬变时间函数。这种函数不是周期性的。图 1.4-1 表示典型的声爆压力振动，它是一个瞬变时间函数。两个物体相互碰撞时的冲击力是瞬变函数的另一例子。

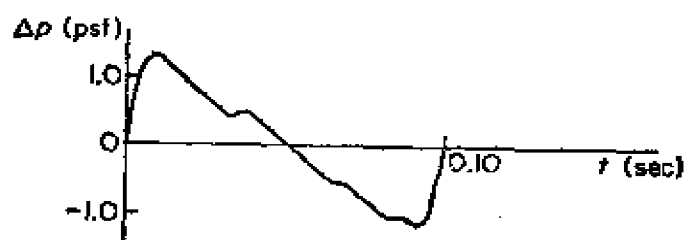


图 1.4-1 声爆（N波）是一瞬变时间函数

机械系统的冲击响应一般认为属于瞬变响应。由于阻尼的存在，这种振动在激励力去除之后将渐息。

[1] J.W. Cooley and J.W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation* **19**; 90 (April 1965), pp.297～301.

See also,—"Special Issue on Fast Fourier Transform", *IEEE Trans. on Audio & Electroacoustics*, Vol. AU-15, No.2 (1967).

由于瞬变波不是周期的，所以傅立叶级数的方法不能应用。但是可用傅立叶变换法分析它的频率容量（frequency content）（见第10章）。
与周期函数的离散频谱相反，瞬变时间函数的频谱是连续的。

1.5 随机时间函数

到现在为止我们所讨论的函数都可以归属于一定的类型的，即可以写出数学表示式，同时可以算出任意时间的函数值。但是有许多物理现象则形成不定的参数，不能在确定的意义上预测它的函数值。作为例子，我们可以举出音响发生器的输出，海浪的波高，地震时地壳运动，在飞机飞翔时机翼引起的压力冲击等。这些现象都具有一个共同特性：其在任意时间的即时值无法预测。这种类型的不确定参数称之为随机时间函数。

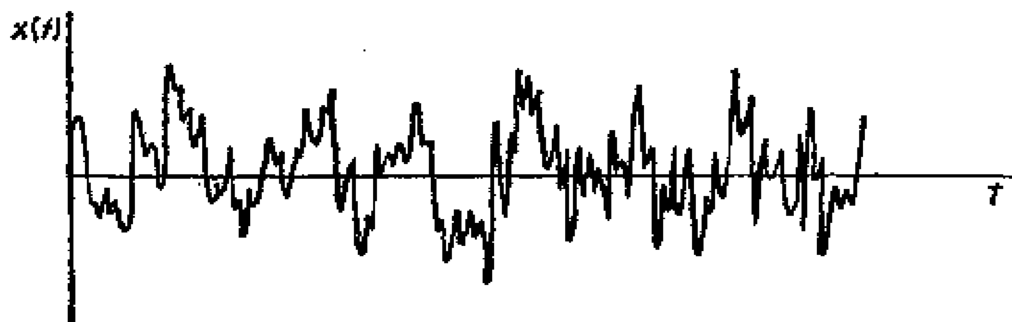


图 1.5-1 随机时间函数的记录

典型的随机时间函数示于图 1.5-1。尽管函数具有不规律特性，但是过程的某种平均值还是可以对工程设计提供这类参数的粗略特性。这将在第10章详加讨论。可简要指出，对周期的和瞬变的振动，振幅的概念和频率的讨论是极端重要的。对随机振动，这些量是用统计方法得到的平均值来表征的，例如均方根及均方频谱密度等。

1.6 振荡运动的特性

振荡运动的某些特性对度量振动是很重要的。最简单的是尖峰值和平均值。

尖峰值是指在振动部件中承受的最大应力，它同样对要求的“隔振空间”（rattle space）提出限制。

平均值指示稳定的或静止的数值，好象交流电中直流部分的平均线。它可以从下列时间积分得到：

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad (1.6\text{-}1)$$

例如，正弦波 $A\sin t$ 的一个完整周期的平均值为零；而它的半周的平均值为：

$$\bar{x} = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2A}{\pi}$$

这可以从图 1.6-1 所示的整流的正弦波的平均值中很清楚地看出。

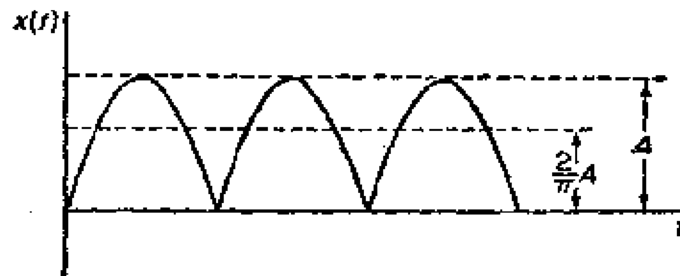


图 1.6-1　整流正弦波的平均值

位移的平方一般与振动能量有关，振动能量用均方值度量。时间函数$x(t)$的均方值可以根据函数值的平方对时间T积分再平均求得：

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

例如，如果$x(t) = A\sin\omega t$，则它的均方值为：

$$\overline{x^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{T}\int_0^T\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\,dt=\frac{1}{2}A^2$$

均方根值（rms）是均方值的开方。对前例，振幅为A的正弦波的均方根值为$A/\sqrt{2}$。

频谱 振荡运动的频率容量对表征振动是很重要的。对单一的正弦波，频率容量可以用在振动频率处引出的长度等于振幅的直线表示。

对周期运动，频谱是由一系列直线组成，这些直线出现在由它的傅立叶级数确定的与基频成整数倍的频率处。如图 1.6-2 所示，在与基频相关的每一分量的相位也可表为完全的图象。

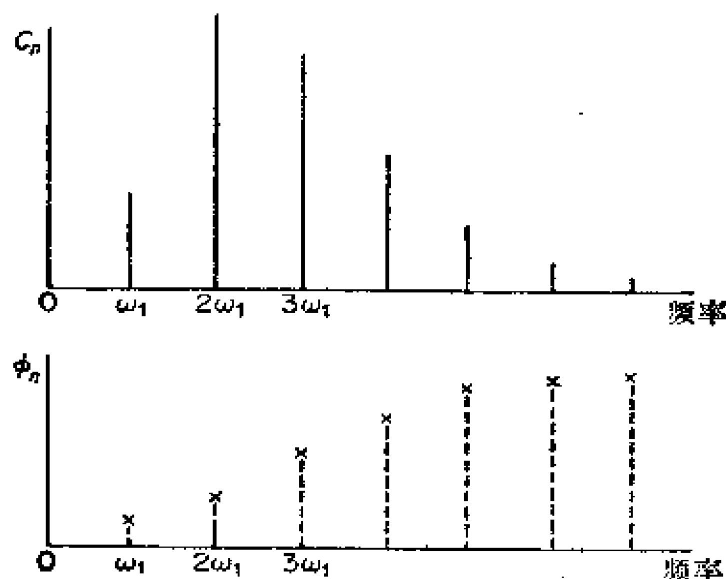


图 1.6-2

瞬变运动尽管时间有限制，但仍可看成是无限周期的周期运动，即用计入零值的办法使周期趋于无限大。以$\tau=2\pi/\omega_1\to\infty$或$\omega_1\to0$，则频谱成非常密集而近似于连续曲线。

随机时间函数是非周期的，它的频谱宁用傅立叶积分方法确定而不用傅立叶级数确定。这个课题将在第10章处理。目前我们只指出，它的频谱是它的均方密度相对于不同频率而画的，如图 1.6-3。这种曲线是连续的，它可以用专门设计的电子仪器来测

定。随机时间函数的相位一般没有多大意义而且是不加考虑的。

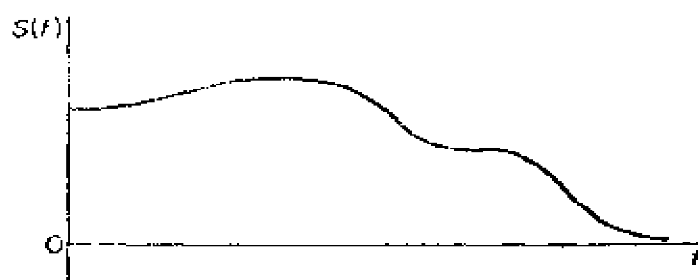


图 1.6-3 随机时间函数的频谱

习　　题

1-1 一谐运动，振幅为0.20英寸，周期为0.15秒，求最大速度和加速度。

1-2 一加速度计指示出结构谐振于82周/秒并具有最大加速度50g，求振动的振幅。

1-3 一谐运动，频率为10周/秒，最大速度为 180 英寸/秒，求振幅、周期和最大加速度。

1-4 找出振幅相同但频率略有差别的两个谐运动的总和，并讨论由于振动合成而形成的差拍现象。

1-5 把复数$4+3i$表为指数形式$Ae^{i\theta}$。

1-6 把两个复数 $(2+3i)$、$(4-i)$ 相加并表为 $A\angle\theta$ 的形式。

1-7 证明一个复矢量用 i 相乘等于把它旋转90°。

1-8 求两复矢量 $5e^{i\pi/6}$和$4e^{i\pi/3}$ 的和并找出合成复矢量与第一个复矢量间的夹角。

1-9 求图 P.1-9所示矩形波的傅立叶级数。

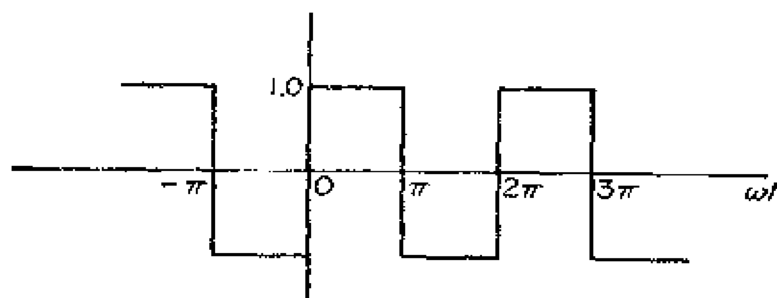


图 P.1-9

1-10 如题1-9的矩形波的原点向右移动$\pi/2$，求其傅立叶级数。

1-11 求图P.1-11所示的三角形波的傅立叶级数。

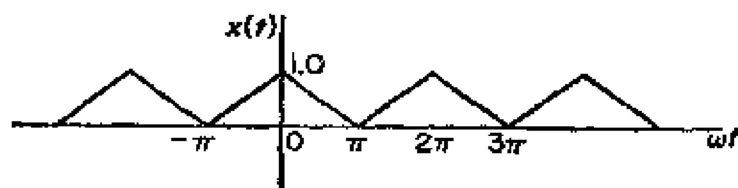


图 P.1-11

1-12 求图P.1-12 所示的锯齿形波的傅立叶级数。

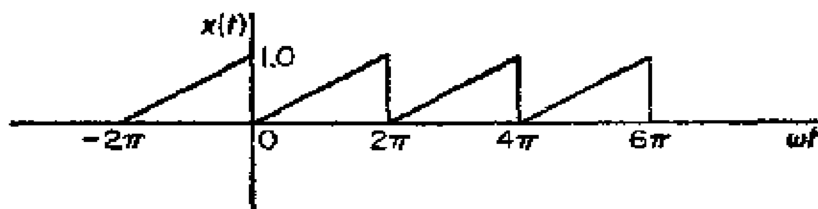


图 P.1-12

1-13 求正弦波正半边波的均方根值。

1-14 依照平方曲线及傅立叶级数两种方法求题1-12的锯齿形波的均方值。

1-15 画出题1-11的三角形波的频谱。

1-16 求图P.1-16所示的矩形冲击波的傅立叶级数和频谱。

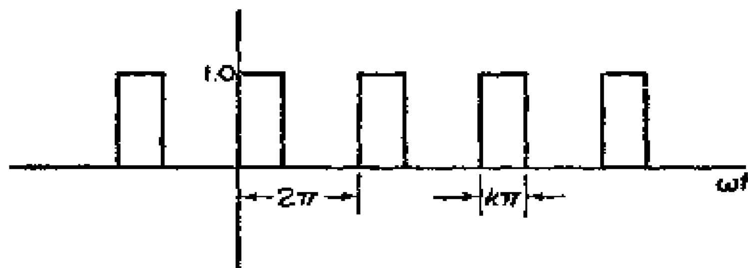


图 P.1-16

1-17 写出图P.1-17所示的曲柄连杆机构位移 s 的方程式，并求谐波成分及其相对值。

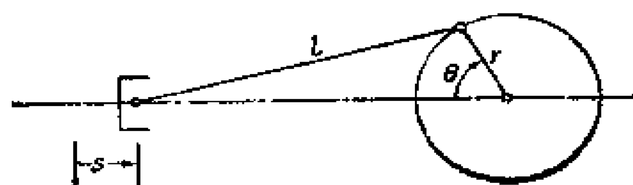


图 P.1-17

第二章 自 由 振 动

2.1 力的叠加原理

任何具有质量和弹性的系统都能产生振动。最简单的振荡系统是如图 2.1-1 所示的由质量和弹簧组成的系统。支承质量的弹簧假定它的质量可以忽略，它的刚度为 k（每单位变形的力）。系统具有一个自由度，因为它的运动可以用单一的坐标 x 来描述。

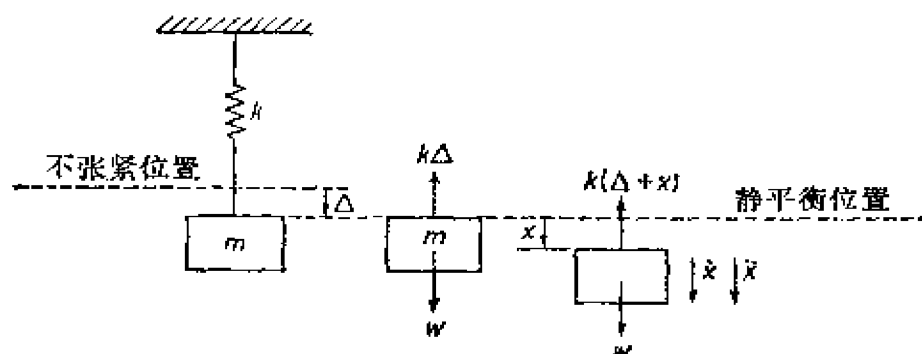


图 2.1-1 弹簧-质量系统和它的分离体

当给质量以运动时，系统将在固有频率 f_n 下发生振荡。固有频率是系统的一个特性。现在我们来研究单自由度自由振动的一些基本概念。

牛顿第二定律是研究系统运动的首要基础。如图2.1-1所示，弹簧在静平衡位置的变位是Δ，弹簧力 $k\Delta$等于作用在质量m上的重力w

$$k\Delta = w \qquad (2.1\text{-}1)$$

位移 x 从静平衡位置度量，因此作用在m上的力是 $k(\Delta + x)$ 和 w。规定 x 向下为正，所有的量，包括力、速度和加速度，都是向

下为正。

现在我们用牛顿第二定律于质量m的运动：

$$m\ddot{x} = \Sigma F = w - k(\Delta + x)$$

因为 $k\Delta = w$，因此得：

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2.1-2}$$

很显然，选择静平衡位置作为参考坐标，可以从运动方程中消去重量w和弹簧的静力$k\Delta$，而作用在m上的合力就只有由于弹簧位移x而产生的力了。

用下式来表示圆频率ω_n：

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{2.1-3}$$

方程（2.1-2）可改写为：

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2.1-4}$$

与方程（1.2-8）比较便可推断，这也是谐运动。二阶齐次线性微分方程（2.1-4）的通解为：

$$x = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t \tag{2.1-5}$$

式中A、B是两个必要的常数。这些常数可根据起始条件$x(0)$和$\dot{x}(0)$求得，于是方程（2.1-5）可简化为：

$$x = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t + x(0)\cos\omega_n t \tag{2.1-6}$$

振荡的固有周期可以从$\omega_n\tau = 2\pi$得到，或

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.1-7}$$

固有频率：

$$f_n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1-8}$$

根据方程（2.1-1）取$k\Delta = mg$取代上式，则上列诸式均可表示为静变位Δ的函数。取$g = 386$英寸/秒^2，Δ用英寸表示，频率变为：

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta''}} = \frac{3.127}{\sqrt{\Delta''}} \text{（周/秒）}$$

$$= \frac{187.6}{\sqrt{\Delta''}} \text{（周/分）} \qquad (2.1\text{-}9)$$

因此单自由度的固有频率只决定于静变位 Δ。等式（2.1-9）用对数坐标的图示见图2.1-2。

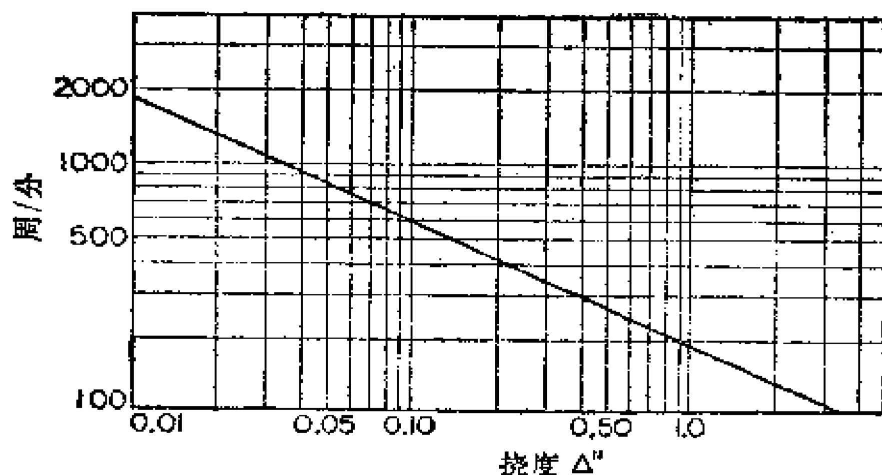


图 2.1-2　固有频率与静变位Δ的函数关系

尽管表面上看来振荡系统可能不同，但这一节的讨论也适用于无阻尼的单自由度振动。在有些情况下，振荡可能是扭转的，如旋转摆。在此情况下，牛顿第二定律改为旋转系统：

$$J\ddot{\theta} = \Sigma M \qquad (2.1\text{-}10)$$

式中M为转矩，J为质量惯矩，$\ddot{\theta}$是角加速度。这些参数都相对同一固定的转动惯性轴。上述等式对于质量中心轴线在运动的情况也是适用的。

2.2 能量方法

在保守系统中总能量是不变的，运动微分方程可以根据能量守恒原理建立。对无阻尼的自由振动系统，能量的一部分是动能，另一部分是势能。动能T是以质量具有速度的形式储存的，势能则是以弹性变形能的形式或力场（例如重力场）作功的形式储存的。总能量不变，它的变化率为零，正如下列等式所表示的：

$$T + U = 常数 \qquad (2.2-1)$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \qquad (2.2-2)$$

如果我们感兴趣的仅仅是系统的固有频率，则可从下列方法确定。从能量守恒原理，我们可以写出

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \qquad (2.2-3)$$

式中“1”、“2”表示两个不同的时间。令“1”代表质量通过静平衡位置的时间，即选择 $U_1 = 0$ 作为势能参考坐标；令“2”表示质量具有最大变形的时间。在这个位置，质量的速度为零，因而 $T_2 = 0$，因此有：

$$T_1 + 0 = 0 + U_2 \qquad (2.2-4)$$

但是如果系统是谐运动，则 T_1 和 U_1 均是最大值，所以

$$T_{max} = U_{max} \qquad (2.2-5)$$

从上式可直接得到固有频率。

例2.2-1

确定图2.2-1所示的扭转摆的固有频率。

解：设摆运动是谐运动且由下式表示：

$$\theta = A\sin\omega_n t$$

其最大动能和势能是：

$$T_{max} = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2_{max} = \frac{1}{2} J\omega_n^2 A^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} K\theta^2_{max} = \frac{1}{2} KA^2$$

使两个能量相等可得固有频率的表示式：

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

例2.2-2

一个重量为 w 半径为 r 的圆盘沿着半径为 R 的圆表面作无滑动的滚动，如图 2.2-2。列出圆盘绕最低点作微小振荡的运动方程。对无滑动，$r\phi = R\theta$。

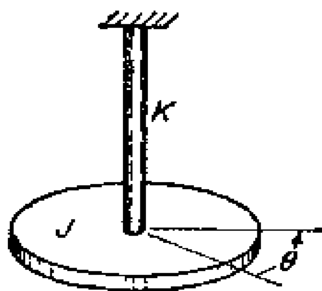


图 2.2-1　扭转摆

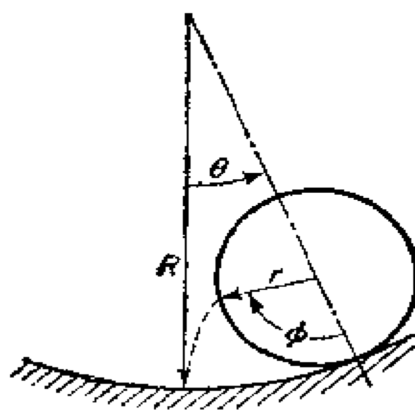


图 2.2-2

解：　当确定圆盘动能时注意它同时作平移和回转运动。圆盘中心平移速度是 $(R-r)\dot{\theta}$，而回转速度为$(\dot{\phi}-\dot{\theta})=(\frac{R}{r}-1)\dot{\theta}$，因此 $\dot{\phi}=(R/r)\dot{\theta}$（无滑动）。从此得动能为：

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{w}{g}[(R-r)\dot{\theta}]^2+\frac{1}{2}\ \frac{w}{g}\ \frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{R}{r}-1\right)\dot{\theta}\right]^2$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{w}{g}(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

式中 $\frac{w}{g}\cdot\frac{r^2}{2}$是圆盘相对它质量中心的惯性矩。

相对于最低位置的势能是：

$$U=w(R-r)(1-\cos\theta)$$

它等于重力在圆盘提升的垂直高度 $(R-r)(1-\cos\theta)$ 上所作的负功。

把动能和势能代入公式（2.2-2）得：

$$\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{w}{g}(R-r)^2\ddot{\theta}+w(R-r)\sin\theta\right]\dot{\theta}=0$$

由于θ 角很小，令$\sin\theta=\theta$，我们得扭振的谐运动微分方程：

$$\ddot{\theta}+\frac{2g}{3(R-r)}\theta=0$$

可以看出，振荡的圆频率是：

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

2.3 等效质量

到现在为止我们在计算固有频率时都假定弹簧没有质量。弹簧和其它运动的元件常常占系统总质量的相当部分，略去它们将会影响固有频率值而且使它偏高。

为了更好地估算固有频率，我们来计算先前略去的运动元件的附加能量。当然，要假定分布质量运动状态。附加能量的综合影响可以表示为集中质量的速度 $\dot{x}$ 的函数，即：

$$T_{\mathrm{add}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{eff}} \dot{x}^2$$

式中m_{eff}为附加到集中质量上的等效质量。

例 2.3-1

求图2.3-1所示系统在计算固有频率时的弹簧有效质量。

解： 令 $\dot{x}$ 为集中质量m的速度，我们假定弹簧元件的速度从固定端开始按坐标y 作线性增加：

$$\dot{x}\frac{y}{l}$$

弹簧的动能可以根据下式积分得到：

$$T_{\mathrm{add}} = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\dot{x}\frac{y}{l}\right)^2 \frac{m_s}{l}\,dy = \frac{1}{2}\frac{m_s}{3}\dot{x}^2$$

这就是说等效质量为弹簧质量的三分之一。把这个等效质量加到集中质量中就得到修正后的固有频率：

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}}$$

例 2.3-2

振荡系统常是由杠杆、齿轮及其它环节组成，这表面看来使分析复杂化了。引擎的阀系统(图 2.3-2)就是这种系统的例子。

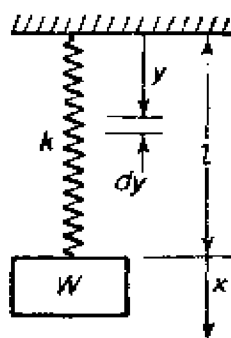


图 2.3-1 弹簧的等效质量

通常要求把这样系统简化为简单的等效系统。

转动惯量为 J 的摇杆、质量为m_v的阀及质量为 m_s 的弹簧，可用下式能量方程简化到 A 点：

$$T=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_v(b\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{3}\right)(b\dot{\theta})^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(J+m_v b^2+\frac{1}{3}m_s b^2\right)\dot{\theta}^2$$

注意到 A 点的速度是 $\dot{x}=a\dot{\theta}$，上式变为：

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{J+m_v b^2+\frac{1}{3}m_s b^2}{a^2}\right)\dot{x}^2$$

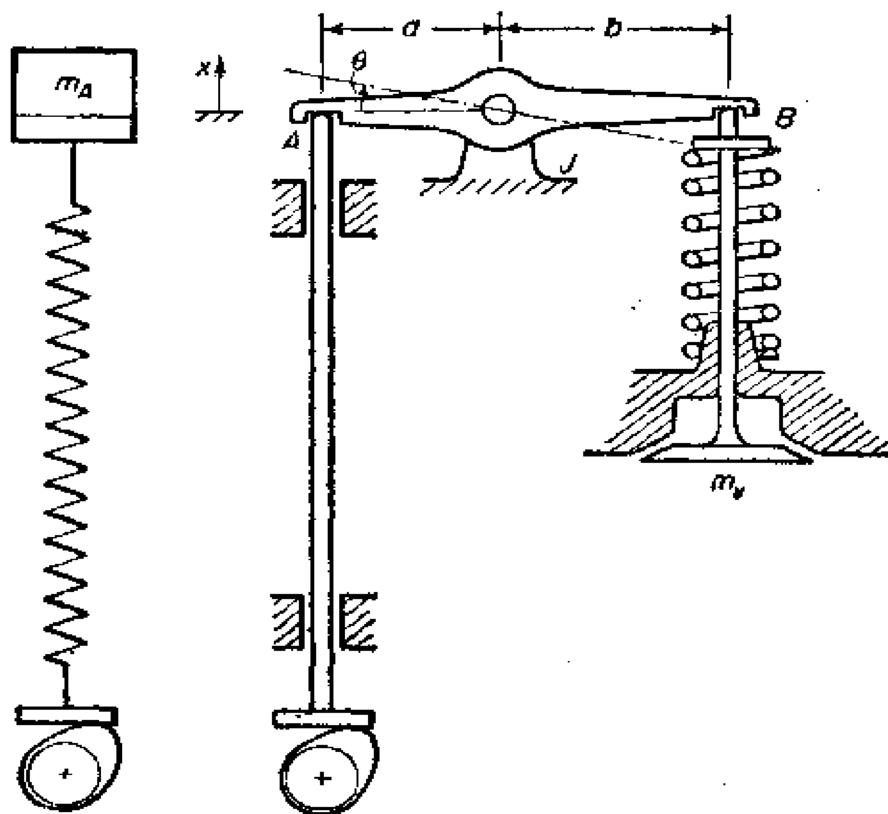


图 2.3-2 引擎的阀系统

因此，在A点的等效质量是：

$$m_A=\frac{J+m_0b^2+\frac{1}{3}m_sb^2}{a^2}$$

如果推杆简化成一个弹簧，而附加质量加于A点，那么整个系统将被简化成图 2.3-2 左侧所示的由一个弹簧和一个质量组成的系统。

2.4 阻尼自由振动

当单自由度的线性系统被激励时，它的响应将与激励的类型和存在的阻尼有关。运动方程一般将成为如下形式：

$$m\ddot{x}+F_d+kx=F(t) \tag{2.4-1}$$

式中$F(t)$是激励力而F_d是阻尼力。尽管阻尼力的现实描述困难，但可以假定一种阻尼模型以使它对响应的预报的影响令人满意。在这种模型中正比于速度的粘性阻尼力使数学处理最为简单。

粘性阻尼力可用下式表示：

$$F_d=c\dot{x} \tag{2.4-2}$$

式中c是比例常数。它通常用图 2.4-1 所示的阻尼器来形象地表示。从分离体图可以看出，它的运动方程为：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{2.4-3}$$

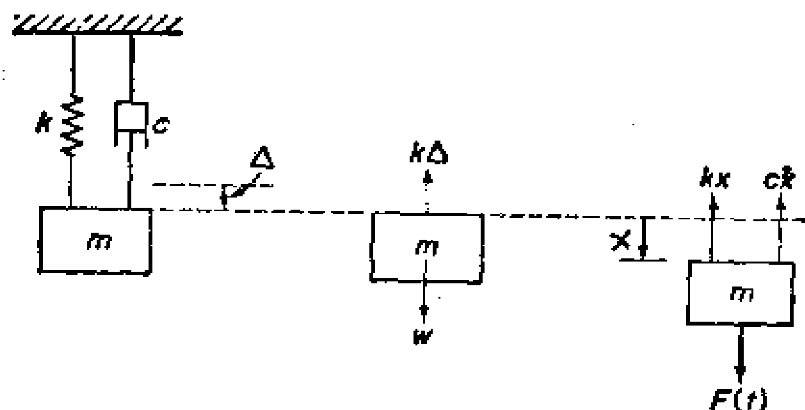


图 2.4-1

上述方程的解分两个部分。如果$F(t)=0$，我们得到齐次微分方程，它的解在物理上就是相应于自由阻尼振动。$F(t)\neq 0$，我们得到不考虑齐次方程解的由激励引起的特殊解。我们首先来考察齐次方程，它将帮助我们理解阻尼作用的某些概念。

对于齐次方程

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \qquad (2.4\text{-}4)$$

的解，传统方法是假定具有下面形式：

$$x=e^{st} \qquad (2.4\text{-}5)$$

式中s是常数。把上式代入微分方程，得：

$$(ms^2+cs+k)e^{st}=0$$

要对所有的t值都要使上式满足，必须使

$$s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}=0 \qquad (2.4\text{-}6)$$

方程（2.4-6)就是大家所熟知的特征方程，它有两个根：

$$s_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}} \qquad (2.4\text{-}7)$$

从此，微分方程的一般解由下式给出：

$$x=Ae^{s_1 t}+Be^{s_2 t} \qquad (2.4\text{-}8)$$

式中A、B是由初始条件$x(0)$和$\dot{x}(0)$决定的常数。

把方程（2.4-7）代入（2.4-8）得：

$$x=e^{-(c/2m)t}\left(Ae^{\sqrt{(c/2m)^2-k/m}\,t}+Be^{-\sqrt{(c/2m)^2-k/m}\,t}\right) \qquad (2.4\text{-}9)$$

式中的第一项$e^{-(c/2m)t}$是单纯的时间指数衰减函数。但是在圆括号内的项的特性如何要看根号中的数值究竟是正、是零还是负。

当阻尼项$(c/2m)^2$大于k/m时，上式的指数将是实数，振动不可能产生。我们把它列入超阻尼这一类。

当阻尼项$(c/2m)^2$小于k/m时，上式中的指数变成为虚数$\pm i\sqrt{k/m-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t$。因为：

$$e^{\pm i\sqrt{k/m-(c/2m)^2}\,t}=\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t\pm$$

$$\pm i\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t$$

故在（2.4-9）的圆括号内的项是振荡的，我们把这种情况列为阻尼振动这一类。

作为振荡和不振荡之间的临界情况，我们把临界阻尼定义为：在临界阻尼时 c 值降低到使根号里的值为零。

现在详细讨论这三种情况，并根据实际使用的量来加以说明。先从临界阻尼开始。

临界阻尼 对临界阻尼的 c_c 值，方程（2.4-9）根号中的值为零。这时

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2=\frac{k}{m}=\omega_n^2$$

或

$$c_c=2\sqrt{km}=2m\omega_n \tag{2.4-10}$$

为了方便地把任一阻尼值用临界阻尼值表示，引入如下的无因次量：

$$\zeta=\frac{c}{c_c} \tag{2.4-11}$$

ζ称阻率。现在把方程（2.4-7）用 ζ 表示，并注意到下列关系：

$$\frac{c}{2m}=\zeta\frac{c_c}{2m}=\zeta\omega_n$$

于是方程（2.4-7）变为：

$$s_{1,2}=(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n \tag{2.4-12}$$

因此先前讨论的阻尼的三种情况，现在就看 ζ 的值究竟是大于、小于或者等于 1。

图 2.4-2用复平面表示了方程（2.4-12），横坐标表示 ζ。如果 $\zeta=0$，方程（2.4-12）简化为：$s_{1,2}/\omega_n=\pm i$，这就是说，根在虚轴上，是相应无阻尼情况。对于 $0\leqslant\zeta\leqslant1$，方程式(2.4-

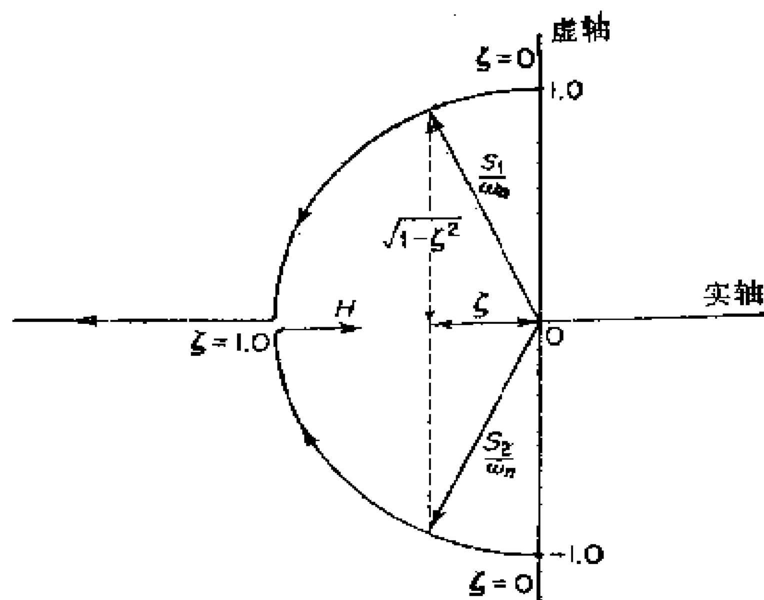


图 2.4-2

12）可改写为：

$$\frac{s_{1,2}}{\omega_n} = -\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}$$

因此，根 s_1 和 s_2 是在圆弧上的共轭复数点，并收敛于 $s_{1,2}/\omega_n = -1.0$ 点。当 ζ 增加超过 1 时，根就在水平轴上分离而且总是实数。考虑图2.4-2，我们现在就可以容易地研究解(2.4-9)了。

振荡运动〔$\zeta<1.0$(弱阻尼情况)〕 把方程（2.4-12)代入方程（2.4-8)，得一般解：

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}(Ae^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + Be^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}) \quad (2.4\text{-}13)$$

上式同样可以写成如下两式的一种：

$$x = Xe^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\phi) \quad (2.4\text{-}14)$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t}\,(C_1\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + C_2\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t) \quad (2.4\text{-}15)$$

式中任意常数 X、ϕ 或 C_1、C_2 是根据初始条件决定的。用起始条件 $x(0)$和 $\dot{x}(x)$，方程（2.4-15）可化为：

$$x=e^{-\zeta\omega_n t}\left[\frac{\dot{x}(0)+\zeta\omega_n x(0)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\right.$$

$$\left.+x(0)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right] \qquad (2.4\text{-}16)$$

这个方程说明阻尼振荡频率等于

$$\omega_d=\frac{2\pi}{\tau_d}=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (2.4\text{-}17)$$

图 2.4-3 表示了阻尼振动的一般特性。

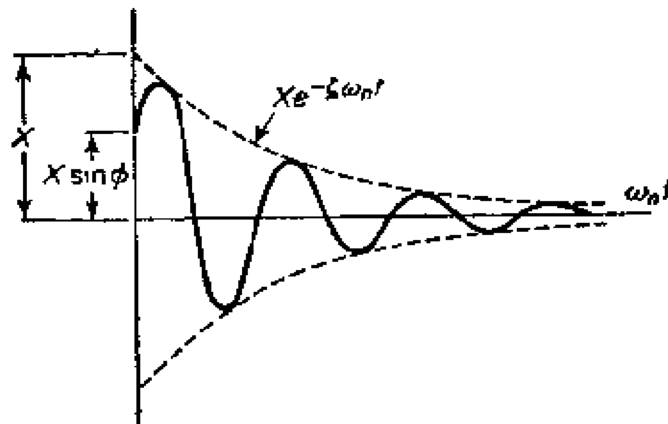


图 2.4-3 阻尼振动（$\zeta<1.0$）

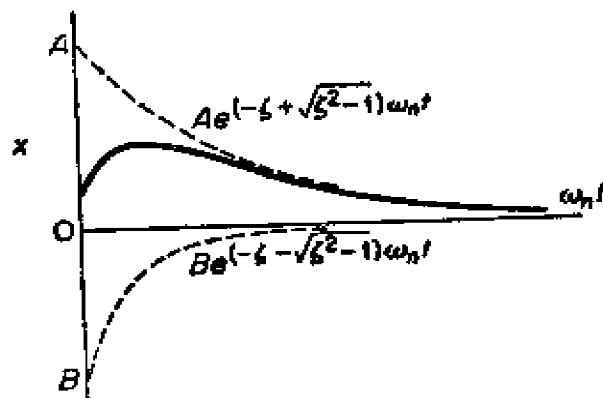


图 2.4-4 非周期运动（$\zeta>1.0$）

非振荡运动〔$\zeta>1.0$（超阻尼）〕 当 ζ 超过 1 时两个根都在实数轴上（见图2.4-2），而且向着增加和减小两个方向。一般解

变为：

$$x = Ae^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + Be^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \qquad (2.4\text{-}18)$$

式中

$$A = \frac{\dot{x}(0) + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$B = \frac{-\dot{x}(0) - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}.$$

这是指数衰减时间函数(图2.4-4)，这个运动称之为非周期运动。

临界阻尼运动〔$\zeta=1.0$〕 当$\zeta=1.0$时，得两个重根：$s_1 = s_2 = -\omega_n$，方程（2.4-8）合成为一项：

$$x = (A+B)e^{-\omega_n t} = Ce^{-\omega_n t}$$

而且为了满足两个初始条件，常数的个数是不够的。为了满足初始条件$\dot{x}(0)$和$x(0)$的解可以从方程（2.4-16）令$\zeta\to1$来得到：

$$x = e^{-\omega_n t}\{[\dot{x}(0) + \omega_n x(0)]t + x(0)\} \qquad (2.4\text{-}19)$$

图2.4-5表示了初始位置为$x(0)$时三种响应。

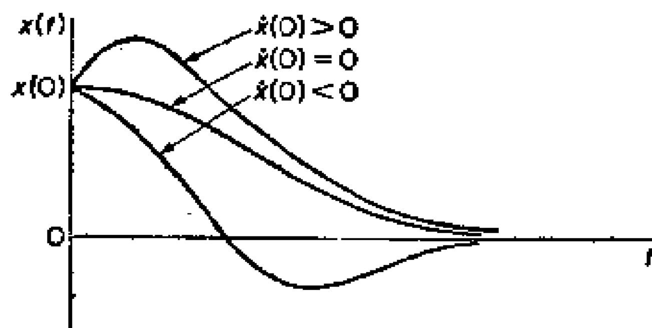


图 2.4-5 临界阻尼运动〔$\zeta=1.0$〕

许多电工仪表和仪器的运动部件为了避免超调和振荡而处于临界阻尼。

2.5 对数衰减率

确定系统存在阻尼大小的一种常用方法是测定自由振荡的衰减率。阻尼越大，衰减率也越大。

我们来考虑由方程（2.4-14）表示的阻尼振动：

$$x = Xe^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \phi)$$

它表示在图2.5-1。

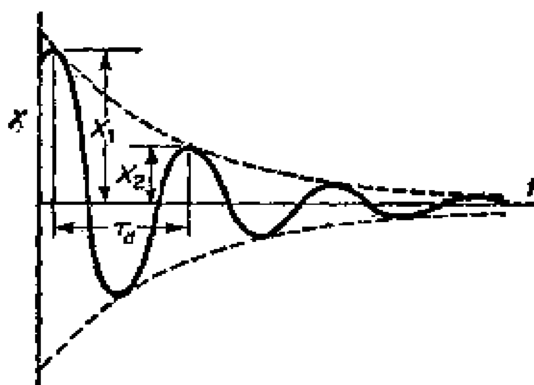


图 2.5-1　用对数衰减率度量的振荡衰减比率

现在我们引入“对数衰减率”这个概念，它定义为任意二个相邻振幅比值的自然对数。因此，对数衰减率的表示式如下：

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}\ \sin\ (\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t_1 + \phi)}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)}\ \sin\ [\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n(t_1+\tau_d)+\phi]}$$

（2.5-1）

因为上面的正弦函数当时间增加一阻尼周期τ_d时函数值不变，故上式简化为：

$$\delta = \ln\frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)}} = \ln e^{\zeta\omega_n\tau_d} = \zeta\omega_n\tau_d \qquad (2.5\text{-}2)$$

把阻尼周期 $\tau_d = 2\pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 代入上式，对数衰减率公式变为：

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (2.5\text{-}3)$$

这是精确的公式。当 ζ 很小时可以用下列近似公式代替：

$$\delta \cong 2\pi\zeta \qquad (2.5\text{-}4)$$

图 2.5-2 表示了 δ 的精确值及近似值与 ζ 的关系。



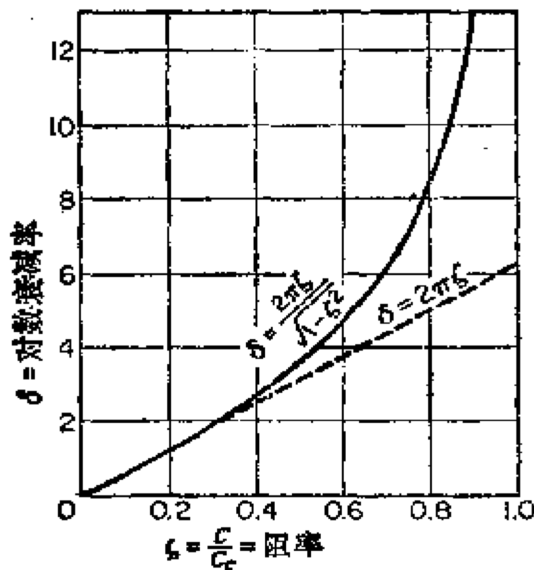


图 2.5-2　作为ζ函数的对数衰减率

例2.5-1

给定下列参数的粘性阻尼振动系统：

$w=10$磅，$k=30$磅/英寸，$c=0.12$磅/英寸·秒

求对数衰减率和任意两相邻振幅比。

解：系统无阻尼固有频率（每秒弧度）是：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{30\times 386}{10}}$$

$=34.0$弧度/秒。

临界阻尼系数c_c和阻率ζ为：

$$c_c=2m\omega_n=2\times\frac{10}{386}\times 34.0=1.76\text{磅/英寸·秒}$$

$$\zeta=\frac{c}{c_c}=\frac{0.12}{1.76}=0.0681$$

根据公式（2.5-3），对数衰减率为：

$$\delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{2\pi\times 0.0681}{\sqrt{1-0.0681^2}}=0.429$$

任意两靠近循环的振幅比：

$$\frac{x_1}{x_2}=e^{\delta}=e^{0.429}=1.54$$

例 2.5-2

证明对数衰减率也可用下式表示：

$$\delta=\frac{1}{n}\ln\frac{x_0}{x_n}$$

式中x_n是经过n个循环后的振幅。并画出不同ζ值下振幅减小到50%的循环数n。

解：任意两相邻振幅比是

$$\frac{x_0}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\cdots\cdots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=e^{\delta}$$

比值 x_0/x_n 可以写成：

$$\frac{x_0}{x_n}=\left(\frac{x_0}{x_1}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\cdots\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)=(e^{\delta})^n=e^{n\delta}$$

从此可得到要求证明的公式：

$$\delta=\frac{1}{n}\ln\frac{x_0}{x_n}$$

为了确定振幅减小到50%时的循环数，我们可以从上式得到这种情况下的比率：

$$\delta\cong 2\pi\zeta=\frac{1}{n}\ \ln 2=\frac{0.693}{n}$$

$$n\zeta=\frac{0.693}{2\pi}=0.110$$

后一公式是等轴双曲线，它表示在图2.5-3。

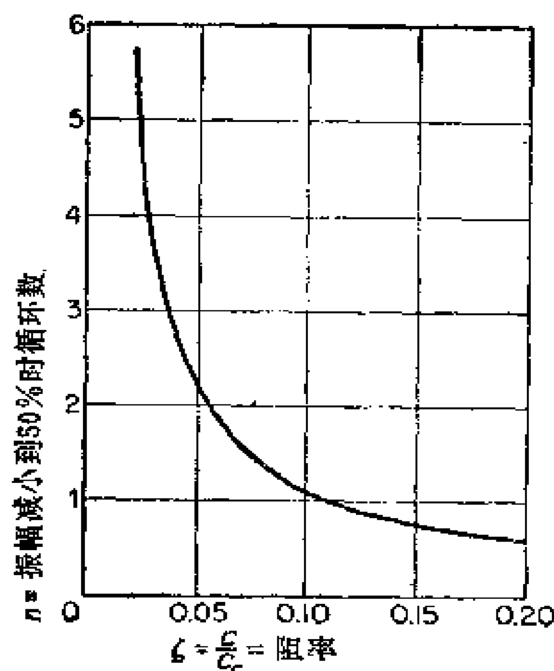


图 2.5-3

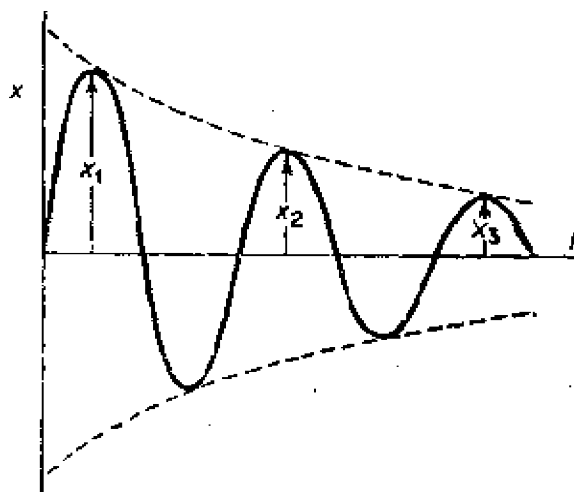


图 2.5-4

例 2.5-3

证明：对于小阻尼，对数衰减率也可表示为每一循环消散能量ΔU和振动能量U的函数。

解：图2.5-4表示相邻振幅为x_1，x_2，x_3，……的阻尼振动，从对数衰减率的定义 $\delta=\ln\frac{x_1}{x_2}$，我们可写出振幅比的指数形式：

$$\frac{x_2}{x_1}=e^{-\delta}=1-\delta+\frac{\delta^2}{2!}-\cdots\cdots$$

系统的振动能量就是在最大位移时储藏在弹簧中的能量，或：

$$U_1=\frac{1}{2}kx_1^2,\qquad U_2=\frac{1}{2}kx_2^2$$

损失的能量：

$$\frac{U_1-U_2}{U_1}=1-\frac{U_2}{U_1}=1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2=1-e^{-2\delta}=2\delta-\frac{(2\delta)_2}{2!}+\cdots\cdots$$

因此对小值δ，我们得：

$$\frac{\Delta U}{U}=2\delta$$

2.6 库仑阻尼

库仑阻尼是由两个干燥表面滑动而形成的。阻力等于正压力和摩擦系数μ的乘积，而且假定运动一开始就有摩擦，μ与速度无关。因为摩擦力的方向总是和运动方向相反，因此每一符号的运动微分方程对半个循环有效。

为了确定振幅的衰减，我们借助于功能原理，令动能变化等于所作的功。今选择半个循环，由速度等于零、振幅等于X_1的极限位置开始，其动能变化为零，对m作功等于零。

$$\frac{1}{2}k(X_1^2-X_{-1}^2)-F_d(X_1+X_{-1})=0$$

或

$$\frac{1}{2}k(X_1 - X_{-1}) = F_d$$

式中X_{-1}是半个循环后的振幅（如图2.6-1所示）。对下半个循环重复上述过程，振幅将再减小 $2F_d/k$，因此，每一个循环振幅的衰减是不变的而且等于

$$X_1 - X_2 = \frac{4F_d}{k} \qquad (2.6\text{-}1)$$

当振幅小于Δ时运动将停止，因为在这个位置时弹簧力将不足以克服静摩擦，而静摩擦力通常是大于动摩擦力的。同时可以指出，此时的振荡频率$\omega_n = \sqrt{k/m}$，它与无阻尼时相同。

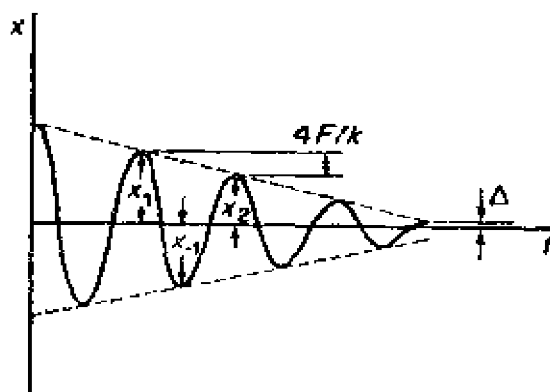


图 2.6-1　具有库仑阻尼的自由振动

图 2.6-1 表示具有库仑阻尼系统的自由振动。值得注意的是振幅随时间按直线衰减。

2.7　刚度和柔度

在单自由度系统的频率计算中，刚度和质量是必须确定的。等效质量可选定系统的适当的参考点来计算，而刚度也必须对同样参考点加以确定。刚度定义为在一定方向产生单位位移所需的力。如果x是在F力下确定的位移，则刚度就是下面的比值：

$$k = \frac{F}{x} \qquad (2.7\text{-}1)$$

柔度是刚度的倒数。它用字母“a”标记并用下式定义：

$$a = \frac{1}{k} = \frac{x}{F} \qquad (2.7\text{-}2)$$

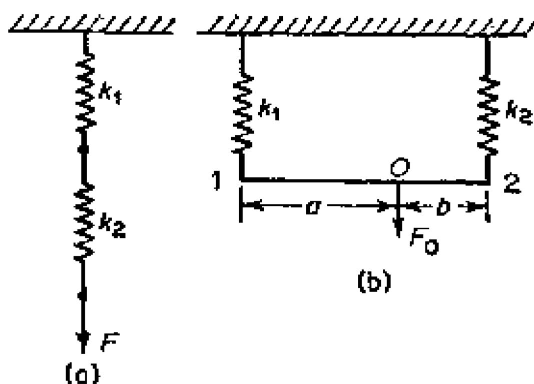


图 2.7-1 组合弹簧的刚度

下面我们要确定标有系统的两个点 i，j 的刚度和柔度。柔度 a_{ij} 被定义为由 j 点作用的单位力对 i 点产生的变位。刚度 k_{ij} 是在 j 点产生单位变位而其他变位等于零时 i 点所需施加的力。依照这些量，公式（2.7-1）和（2.7-2）中的 k 和 a 就是 k_{ii} 和 a_{ii}。在本节末尾的表中列入了各种弹簧具有的刚度。

例 2.7-1

确定图 2.7-1 所示的弹簧系统的刚度。

解：系统(a)：在第二弹簧的下端施加一力 F，每一弹簧将分别张紧 F/k_1 和 F/k_2，因此根据公式（2.7-1），刚度为：

$$k = \frac{F}{\dfrac{F}{k_1} + \dfrac{F}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

系统（b）：在 0 点施加一 F_0 力，则分配到 1、2 点的力分别为 $F_0 b/(a+b)$ 和 $F_0 a/(a+b)$。点 1、2 的变位分别为 $F_0 b/(a+b)k_1$ 和 $F_0 a/(a+b)k_2$，因此 0 点的变位为：

$$x_0 = F_0\left\{\frac{b}{(a+b)k_1} + \frac{a}{(a+b)}\left[\frac{a}{(a+b)k_2} - \frac{b}{(a+b)k_1}\right]\right\}$$

$$= \frac{F_0}{(a+b)^2}\left(\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1}\right)$$

因而在 0 点的弹簧刚度是

$$k_0 = \frac{F_0}{x_0} = \frac{(a+b)^2}{\left(\dfrac{a^2}{k_2} + \dfrac{b^2}{k_1}\right)}$$

如果$k_1=k_2=k$，$a=b$，则上式简化为$k_0=2k$。

弹簧刚度表

$$k=\frac{1}{1/k_1+1/k_2}$$

$$k=k_1+k_2$$

$$k=\frac{kI}{l}$$，I＝横截面的惯性矩　l＝总长

$$k=\frac{EA}{l}$$，A＝横截面面积

$$k=\frac{GJ}{l}$$，J＝横截面扭转常数

$$k=\frac{Gd^4}{64nR^3}$$，n＝圈数

$$k=\frac{3EI}{l^3}$$

$$k=\frac{48EI}{l^3}$$

$$k=\frac{192EI}{l^3}$$

$$k=\frac{768EI}{7l^3}$$

$$k=\frac{3EIl}{a^2b^2}$$

习　题

2-1　一磅的重物悬挂在细弹簧上，伸长为0.31英寸，求系统的固有频率。

2-2　一个质量为m、刚度为k_1的弹簧质量系统，其固有频率为f_1。令另一刚度为k_2的弹簧串接在第一个弹簧上，频率降低到$\frac{1}{2}f_1$，求k_1与k_2的关系。

2-3　10磅的重物悬挂在弹簧的下端，弹簧上端固定，振动的固有周期为

0.45秒。现将弹簧上下端固定，并把5磅的重物悬挂在弹簧的中点，求它的固有周期。

2-4 有一未知重量W(磅)悬挂在未知的刚度为k(磅/英寸)的弹簧上，其固有频率为94周/分，当W上增加1磅重物时，其固有频率降低到76.7周/分，求W和k值。

2-5 重物w_1悬挂在弹簧k上处于静平衡位置，第二个重物w_2从高度h处自由下落到w_1(无弹跳)如图P.2-5所示，求其后的运动。

2-6 根据图2.2-1的扭转摆，请说明其固有频率与下列各因素有何关系；(a)细杆的长度；(b)细杆的直径；(c)细杆的材料；(d)悬挂的重量；(e)悬挂重物的回转半径。

2-7 一个重70磅的飞轮允许作为摆绕环内侧的刀刃摆动，如图P.2-7。如测出的振荡周期为1.22秒，求飞轮绕几何轴心的惯性矩。

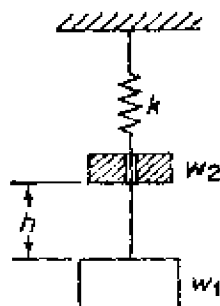


图 P.2-5

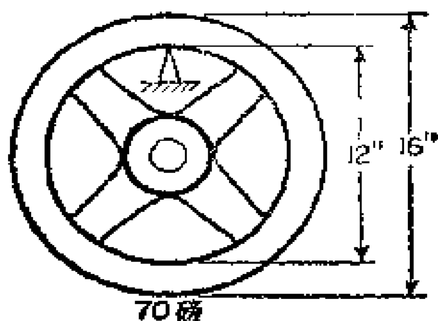


图 P.2-7

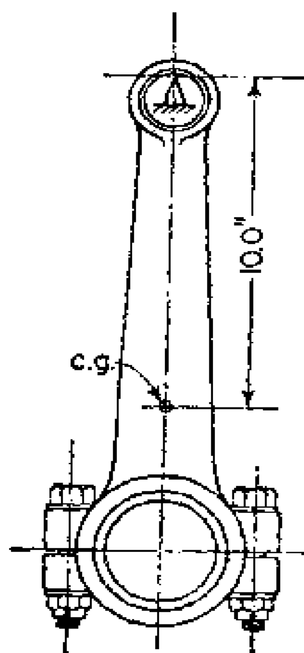


图 P.2-8

2-8 一个重4.8磅的连杆绕图P.2-8所示的支承点每分钟摆动53次，求它绕重心的惯性矩。重心离支承点为10.0英寸。

2-9 一个重W的飞轮用三根各长为6英尺的金属丝支承在水平面，三根金属丝均匀地分布在半径为10英寸的圆周上。如飞轮绕通过其中心的铅

垂轴线的振荡周期是2.17秒，求飞轮的回转半径。

2-10 一个惯性矩为J的轮和轴，其轴线与铅垂线的夹角为α，如图P.2-10所示，求由于盘上半径为a（英寸）处有一微小失衡重量w而产生的振荡周期。

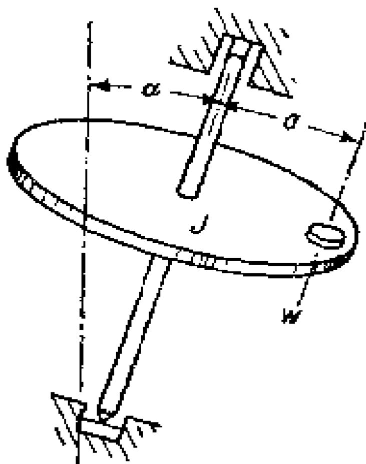


图 P.2-10

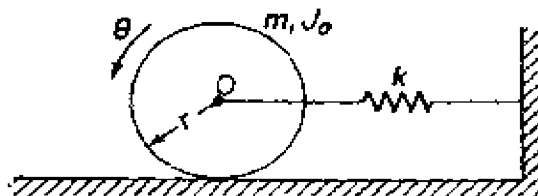


图 P.2-11

2-11 一个质量为m、惯性矩为J_0的圆柱体作自由纯滚动，但圆心有一弹簧k约束，如图P.2-11所示，求振荡的固有频率。

2-12 一个计时器用长度为L的2秒摆控制，见图P.2-12。悬挂摆球的铂金属丝摆动到最低点时，由于与水银点接触使计时电路接通。问：(a)摆长L要多长？(b)如果摆杆在摆动时与水银的接触长度为1/8英

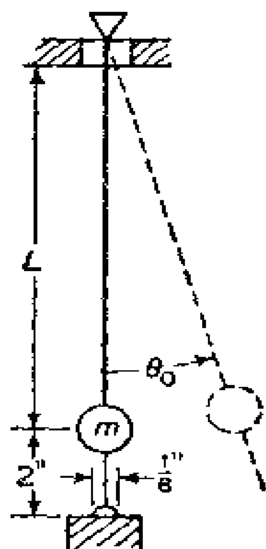


图 P.2-12

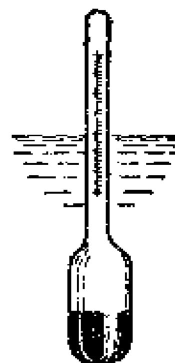


图 P.2-13

寸，那么要限制接触时间为0.01 秒时的摆角 θ_0 应多少？(因接触的振幅很小，故接触过程中的速度假定为不变)。

2-13 如图P.2-13所示的浮标尺用来测定液体比重。浮标尺重量为0.082磅，突出于表面的圆柱体部分直径为1/4英寸。问：当浮标尺放到比重为1.2的液体中忽浮忽沉的振动周期是多少？

2-14 一薄长条板被弯成半圆形，如图P.2-14所示，让它在平面上摇摆，求它的摇摆周期。



图 P.2-14

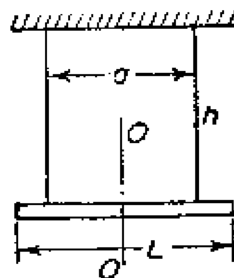


图 P.2-15

2-15 长度为 L、重量为 W 的均匀杆对称地支承在两个弹簧上，如图P.2-15。请建立杆相对于铅垂轴线 0-0 的微角度振动微分方程并确定它的周期。

2-16 一个长度为L 的均匀杆用两根等长度的垂直弹簧支承在水平面位置。如果在杆和弹簧平面中的振荡周期为t_1，绕通过杆重心铅垂线的振荡周期为t_2，请证明杆绕重心的回转半径为：$k=\dfrac{t_2}{t_1}\cdot\dfrac{L}{2}$。

2-17 一绕其重心的回转半径为 k 的均匀杆，离其质心为 a、b处用长度为 h 的垂直弹簧水平地支承着，证明杆将绕通过质心的铅垂线振荡，并确定其振荡频率。

2-18 长50英寸、直径 $1^1/_2$ 英寸的钢轴作为小汽车车轮的扭转弹簧，如图P.2-18。假定轮胎的重量为38磅，它绕其轴心的回转半径为9.0英寸，求系统的固有频率，并讨论轮胎锁住臂杆和没有锁住时的固有频率的差别。

2-19 弹片式频率测量仪是由很薄的悬臂梁构成，在梁的端部挂有重块。当振动频率与弹片之一的固有频率相同时，频率计就振动，从而指示出频率值。试问当弹簧片的厚度为0.04英寸、宽度为0.25英寸、长度为3.5英寸时要使其固有频率为20周/秒，需在弹簧端部置多少重量？

2-20 有一质量为 m、长度为 l 的均匀杆，在距左端 O 为nl处设一支承点，如图 P.2-20，求杆在O点的等效质量。

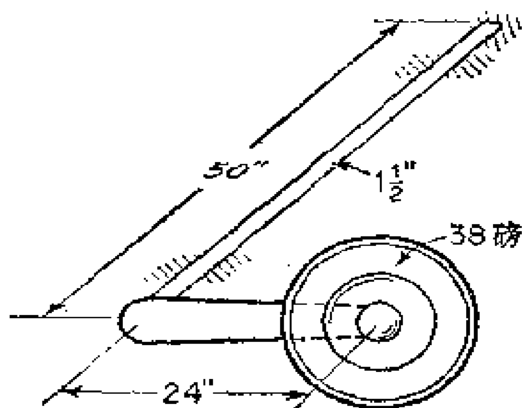


图 P.2-18

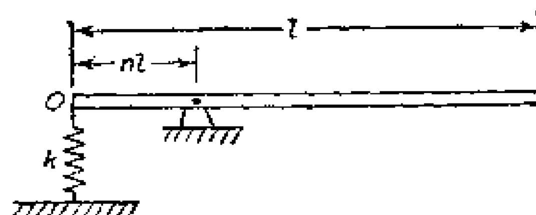


图 P.2-20

2-21 求图 P.2-21所示的火箭发动机加到作动筒质量m_1 的等效质量。

2-22 一均匀悬臂梁用在它的自由端的等效质量代替。请假定一个均布载荷的静变形曲线并以此求出这个等效质量。

2-23 对图 P.2-23所示的系统，求轴 1 的等效转动惯量。

2-24 求图 P.2-24所示系统的动能，把它表为 $\dot{x}$ 的函数。

2-25 求图 P.2-25所示系统在 n 点的等效质量。

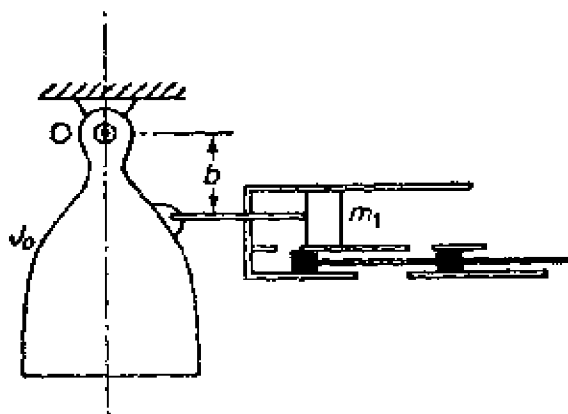


图 P.2-21

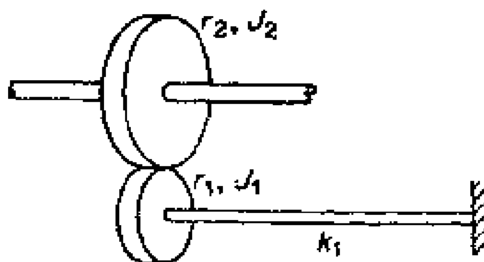


图 P.2-23

2-26 2 磅的重物悬挂在刚度为 4 磅/英寸的弹簧端部，求临界阻尼系数。

2-27 为了测定减震器，曾在给定柱塞作用力下测定柱塞速度。按题2-26的系统，如果0.5磅的重量能产生1.20英寸/秒的速度，求阻率 ζ 值。

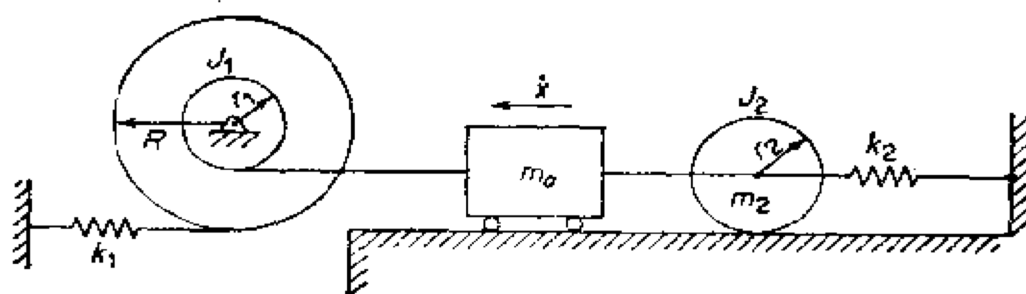


图 P.2-24

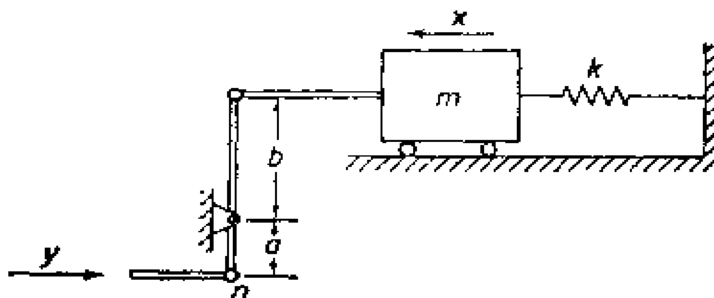


图 P.2-25

2-28 一个振动系统在下列起始条件下振动：$x=0$，$\dot{x}=v_0$。求下列三种情况下的运动方程：(a)$\zeta=2.0$，(b)$\zeta=0.50$，(c)$\zeta=1.0$。试画出三种情况下的无因次曲线（以$\omega_n t$为横坐标以$x\omega_n/v_0$为纵坐标）。

2-29 一个由5磅重块和刚度为10磅/英寸的弹簧组成的振动系统，受到粘性阻尼，它两任意相邻振幅比率是1.00到0.98。求：(a)阻尼系统的固有频率；(b)对数衰减率；(c)阻尼系数c；(d)阻率ζ。

2-30 一个由10磅重块和刚度为20磅/英寸的弹簧组成的振动系统，减震器的阻尼系数$c=0.071$磅·秒/英寸。求：(a)阻率ζ；(b)对数衰减率δ；(c)二相邻振幅的比值。

2-31 一个振动系统具有下列参数：$w=38.6$磅，$k=40$磅/英寸，$c=0.40$磅·秒/英寸，求：(a)阻率；(b)阻尼振荡固有频率；(c)对数衰减率；(d)任意二相邻振幅比值。

2-32 建立图P.2-32所示系统的运动微分方程并求出：(a)临界阻尼系数表示式，(b)阻尼振荡的固有频率表示式。

2-33 写出图P.2-33所示系统的运动微分方程并求阻尼振荡固有频率和临界阻尼系数。

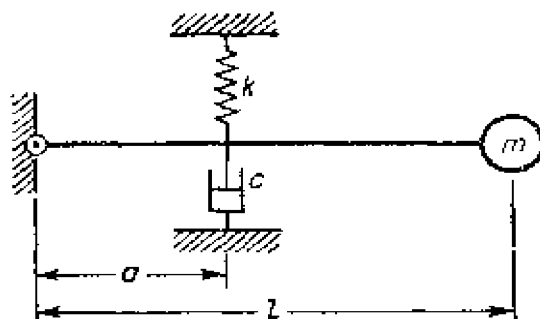


图 P.2-32

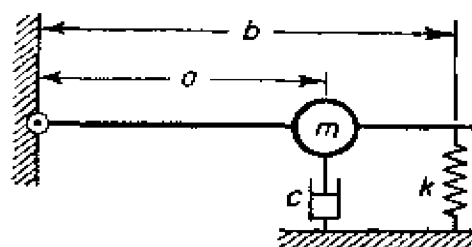


图 P.2-33

2-34 一个具有粘性阻尼的弹簧质量系统，使质量离开平衡位置然后释放。如果每一循环振幅减小 5 %，那么系统所具有的阻尼系数占临界阻尼系数的几分之几？

2-35 一个长度为 l、质量为 m 的刚性杆铰接在0点并以弹簧和粘性阻尼器支承，如图P.2-35。设杆绕0点的惯性矩为 $ml^2/3$，偏离静平衡位置的摆角以 θ 标记，求：(a) 小角度 θ 的方程式；(b)无阻尼频率计算公式；(c)临界阻尼表示式。

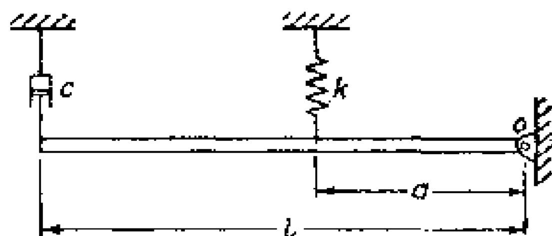


图 P.2-35

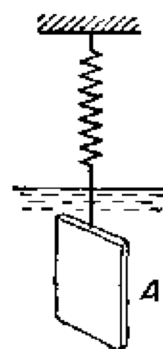


图 P.2-36

2-36 一个重W、面积为A 的薄板悬挂在弹簧上，让它在粘性液体中振荡，如图P.2-36。如τ_1是无阻尼的振动周期(假定系统是在空气中)，τ_2是浸在液体中的有阻尼的周期，请证明下式：

$$\mu=\frac{2\pi W}{gA\tau_1\tau_2}\sqrt{\tau_2^2-\tau_1^2}$$

其中液体阻尼力 $F_d=\mu 2Av$，$2A$ 是板的总面积，v 是它的速度。

2-37 一个重1200磅的枪管具有刚度为20000磅/英尺的反弹弹簧，如果发射

时枪管反弹 4 英尺，求：(a) 枪管起始反弹速度；(b) 减震器的临界阻尼系数（它是在反冲结束时参予工作的）；(c) 枪管返回到离起始位置 2 英寸时所需要的时间。

2-38 重为 10 磅的柱塞在管内以50英尺/秒速度运动，并有弹簧和减震器予以限制，如图 P.2-38。求柱塞碰到弹簧减震器以后的最大位移；问走过这段行程花几秒时间？



图 P.2-38

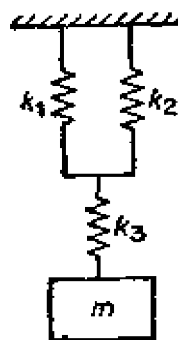


图 P.2-41

2-39 一个防冲器是这样设计的：当它释放时超调量为起始位移的10%，求 ζ_1；问：如果 ζ 为 $\frac{1}{2}\zeta_1$，超调量将是多少？

2-40 请根据 $x_1/x_2=1/2$ 的情况，讨论公式：$\Delta U/U=2\delta$ 的局限性。

2-41 请确定图 P.2-41所示弹簧系统的等效刚度。

2-42 求长度为 L 的均匀简支梁在离端部 $\frac{1}{3}L$ 点的柔度。

2-43 求图 P.2-43所示系统的等效刚度，并把它写成与 x 的关系式。

2-44 求图 P.2-44 所示扭转系统的等效刚度。两串接触的扭转刚度为 k_1、k_2。

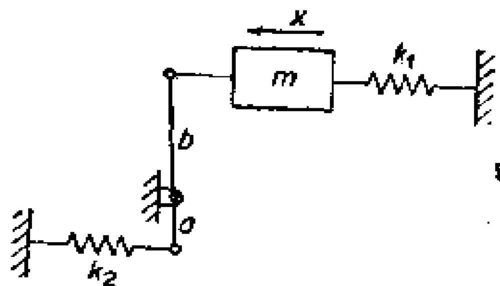


图 P.2-43

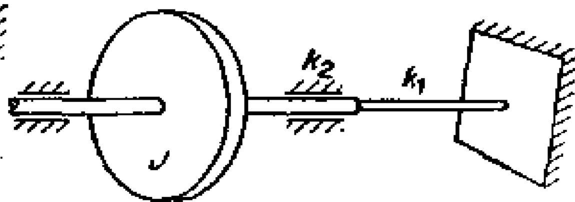


图 P.2-44

2-45 一弹簧质量系统 m，k，从单位起始位移和零起始速度起动。试画出如下两种情况时 $\ln X$ 与 n 的关系曲线(其中 X 是第 n 个循环的振幅)：

(a)粘性阻尼 $\zeta=0.05$, (b)库仑阻尼阻尼力 $F_d=0.05k$，并说明何时二振幅相等。

第三章　谐激励运动

3.1　导引

简谐激励是工程系统中经常遇见的。它通常是由于旋转机械失衡而产生的。尽管纯简谐激励似乎比其他周期激励要较少遇见，但为了更好地理解在更一般的激励下系统的响应，明白在简谐激励下系统的特性是必要的。谐激励可以是系统中的力或系统中某点的位移。

3.2　谐强迫振动

我们将首先考虑受简谐力 $F_0\sin\omega t$ 激励的具有粘性阻尼的单自由度系统，如图 3.2-1。它的运动微分方程可以根据分离体图求得：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t \tag{3.2-1}$$

这个方程的解分为两部分，一部分是所谓余函数，即齐次方程的解，另一部分是特殊积分。余函数在本种情况下就是在第二章讨论过的阻尼自由振动。

上述方程的特解是频率与激励频率 ω 相同的稳态振动。可以假定特解具有如下形式：

$$x=X\sin(\omega t-\phi) \tag{3.2-2}$$

式中 X 是振荡的振幅，ϕ 是位移相对于激励 F_0 的相位角。

把方程（3.2-2）代入微分方程式（3.2-1），就可以找到上述方程中的振幅和相位角。回想起在简谐运动中，速度和加速度分别比位移导前 90° 和 180°，因此微分方程各项可以同样按图 3.2-2 那样图解表示。从图很容易看出：

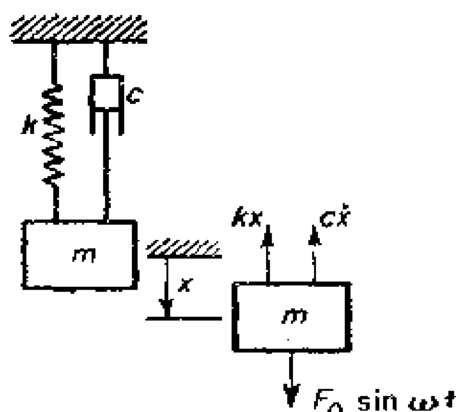


图 3.2-1 具有谐激励的阻尼系统

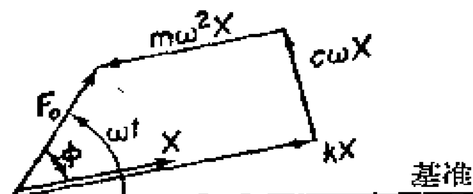


图 3.2-2 有阻尼的强迫振动的矢量关系

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \tag{3.2-3}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2} \tag{3.2-4}$$

现在我们把公式（3.2-3）和（3.2-4）写成无因次的形式，这样就能够把结果用简明的图象表示。把公式(3.2-3)和(3.3-4)的分子和分母都除以 k，得：

$$X=\frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)^2+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \tag{3.2-5}$$

$$\tan\phi=\frac{c\omega/k}{1-\frac{m\omega^2}{k}} \tag{3.2-6}$$

上面的公式还可以进一步表示为下列量的函数：

$\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ = 无阻尼振荡的固有频率；

$c_c=2m\omega_n$ = 临界阻尼系数；

$\zeta=\dfrac{c}{c_c}$ = 阻率；

$$\frac{c\omega}{k}=\frac{c}{c_c}\cdot\frac{c_c\omega}{k}=2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}。$$

于是得到了振幅和相位角的无因次表示式：

$$\frac{Xk}{F_0}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \tag{3.2-7}$$

$$\tan\phi=\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{3.2-8}$$

这些公式表明，无因次的振幅Xk/F_0及相位角ϕ仅仅是频率比ω/ω_n和阻率ζ的函数，同时可以图示于图3.2-3。这些曲线指出，在靠近共振的频率范围内，阻率对振幅和相位角有很大的影响。研究与图3.2-2相应的力图的三种情况，即小值ω/ω_n，$\omega/\omega_n=1$和大值ω/ω_n（见图3.2-4），可以使我们对振动特性有进一步的理解。

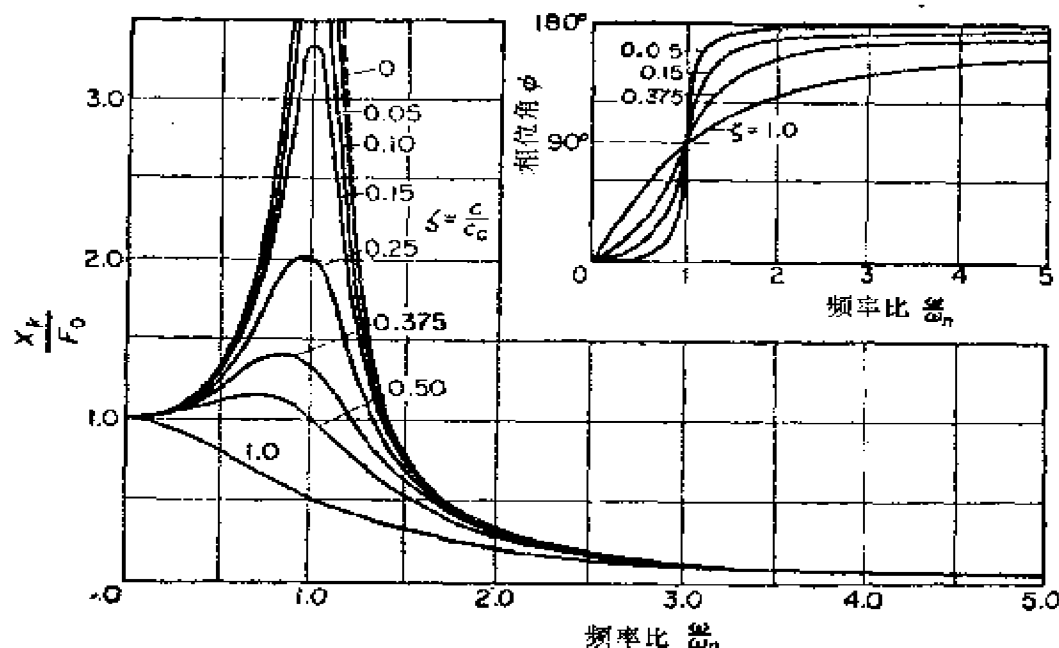


图 3.2-3 公式 (3.2-7) 和 (3.2-8) 的图解

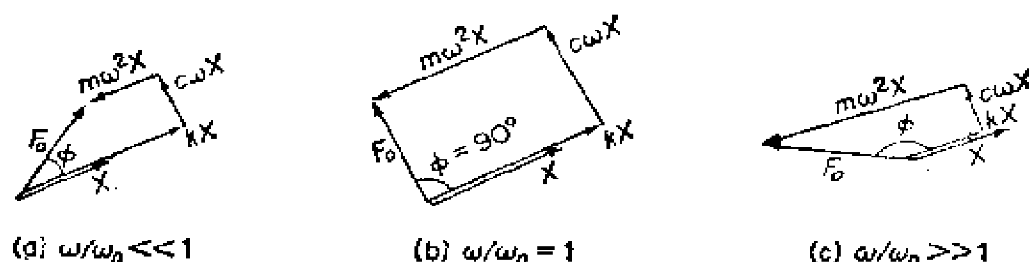


图 3.2-4 强迫振动中的矢量关系

对于$\omega/\omega_n \ll 1$的情况，惯性力和阻尼力都小，这使得相位角ϕ也小，外加力的值接近等于弹簧力，如图 3.2-4*a*。

$\omega/\omega_n=1$时，相位角是 90°，力图如图 3.2-4 *b*。这时惯性力比较大，它与弹簧力相平衡。外加力克服了阻尼力。共振时的振幅可以根据公式(3.2-5)或公式(3.2-7)，或者从图3.2-4*b*求得：

$$X=\frac{F_0}{c\omega_n}=\frac{F_0}{2\zeta k} \qquad (3.2\text{-}9)$$

当$\omega/\omega_n \gg 1$时，ϕ接近 180°，外力几乎全花费在克服惯性力上，如图3.2-4*c*。

总括起来，我们可以写出微分方程和它的完整解，包括瞬变项：

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2 x=\frac{F_0}{m}\sin\omega t \qquad (3.2\text{-}10)$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\cdot\frac{\sin(\omega t-\phi)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} + X_1 e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\phi_1\right) \qquad (3.2\text{-}11)$$

3.3 旋转失衡

在旋转机械中，失衡是振动激励的总根源。这里考虑限制在垂直方向移动的弹簧-质量系统，受到旋转部分失衡质量的激励，如图 3.3-1。失衡用偏心质量m表示，它的偏心距为e并以角速度ω旋转。令x代表非旋转部分质量$(M-m)$离开静平衡

位置的位移，则m的位移是：

$$x = e\sin\omega t$$

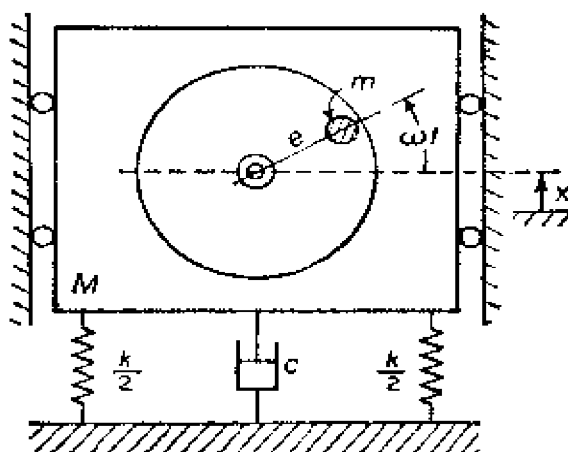


图 3.3-1 由于旋转失衡引起的简谐扰动

因而运动方程为：

$$(M-m)\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}(x + e\sin\omega t) = -kx - c\dot{x}$$

上式可重新改写为：

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = (me\omega^2)\sin\omega t \qquad (3.3\text{-}1)$$

显然上式与方程（3.2-1）相同，但在这里以$me\omega^2$代替F_0，因此稳态解可改写为：

$$X = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad (3.3\text{-}2)$$

$$\tan\phi = \frac{c\omega}{k - M\omega^2} \qquad (3.3\text{-}3)$$

还可以进一步简化为无因次的形式：

$$\frac{M}{m}\cdot\frac{X}{e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad (3.3\text{-}4)$$

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (3.3\text{-}5)$$

这些公式图解表示于 图 3.3-2。完整解是：

$$x(t) = X_1 e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \phi_1) +$$

$$+\frac{me\omega^2}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\phi) \qquad (3.3\text{-}6)$$

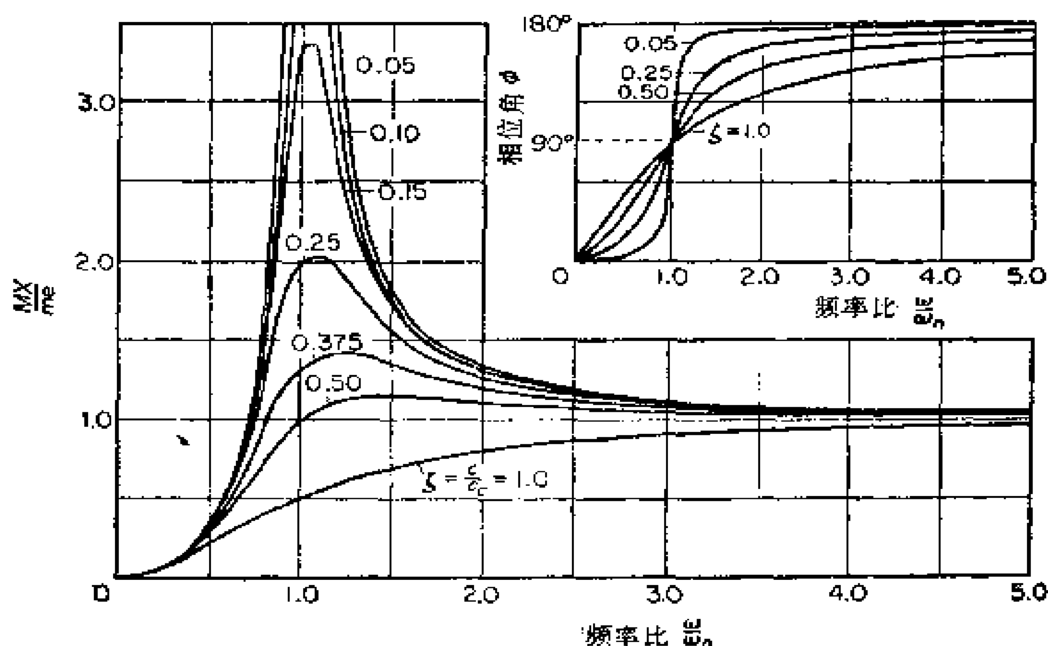


图 3.3-2 旋转失衡强迫振动方程（3.3-4）和（3.3-5）的图示

例 3.3-1

一对反转的偏心重量激振器用来产生弹簧支承的质量的强迫振动，如图 3.3-3。改变转速曾记录下 0.60英寸的共振振幅。当转速增加到大大超过共振频率时，振幅出现在靠近不变的振幅 0.08英寸处，求系统的阻率。

解：根据公式（3.3-4），共振振幅是：

$$X = \frac{\frac{me}{M}}{2\zeta} = 0.60\text{英寸}$$

当 ω 大大地超过 ω_n时，同一公式变为：

$$X=\frac{me}{M}=0.08\text{英寸}$$

解这两个方程，得系统的阻率：

$$\zeta=\frac{0.08}{2\times0.60}=0.0666$$

我们曾指出，偏心距为 e 的质量 m 形成了离心力 $me\omega^2$。这种力根据它们在转子上的分布而产生静失衡和动失衡。

静失衡 当不平衡的质量全部处于一个平面内，如薄圆盘，则不平衡形成的是同一平面的径向力。如图 3.3-4 所示，这种失衡可以用静力试验法来找：将轮轴安放在一对水平轨道上，当轮子比较重的点滚到轮轴最下方一点时轮子就停止了。因此，用不到快速旋转轮子就可找到失衡点，这叫做静平衡法。

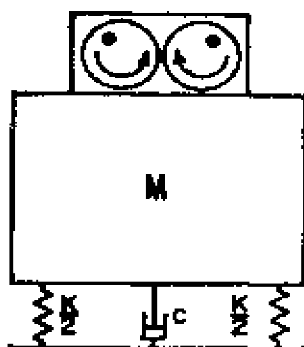


图 3.3-3

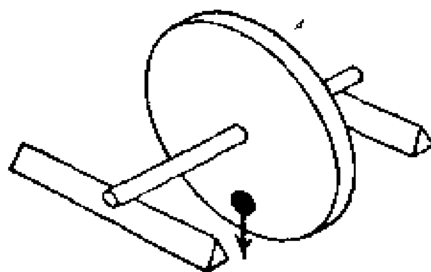


图 3.3-4 具有静失衡的系统

动失衡 当不平衡质量不只在一个平面内时，形成了一个力和一个力偶，这属于动失衡。根据前述方法，静试验法可以找到合力，但如果不快速旋转转子的话，力偶便找不到。例如，我们考虑一个有两个圆盘的轴（图3.3-5），如果两个不平衡质量相等且相对于180°，则转子将相对轴心处于稳定平衡。但是，当转子快速旋转时，每一失衡圆盘将产生旋转离心力，使轴相对支承产生摆动倾向。

一般地说，长转子，如电动机转子和汽车发动机的曲轴，可以看成是由一系列圆盘组成的，每一个都可能有某种失衡。为了找到失衡，这种转子必须用快速旋转法（Spin)。检测和改变转子不平衡的机器叫做平衡机。从本质上看，平衡机是由支承座构成的，支承座用弹簧安装，以便通过运动来检测不平衡力，如图3.3-6。知道了每一支承的振幅及其相对相位，就能找到转子不平衡并消除它。

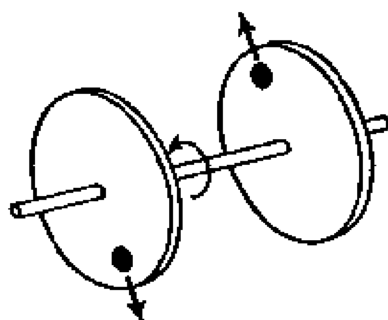


图 3.3-5　有动失衡的系统

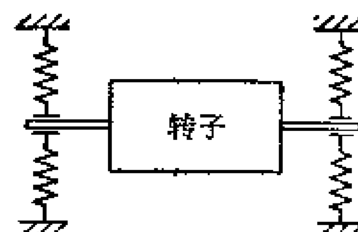


图 3.3-6　转子平衡机

例　3.3-2

尽管薄圆盘可以用静力法平衡，但同样可以用动平衡法。我们描述一个可以用简单方法实现的实验。

圆盘被支承在受弹簧约束的轴承上，它可以象图 3.3-7 那样沿水平移动。以任一预定速度转动，注意最大偏斜时的振幅X_0以及轮的位置“a”。装在轴承上的加速度计及闭光测频仪可以作这些检测。由初始失衡w_0而引起的振幅X_0被刻在轮子沿o到a的方向。

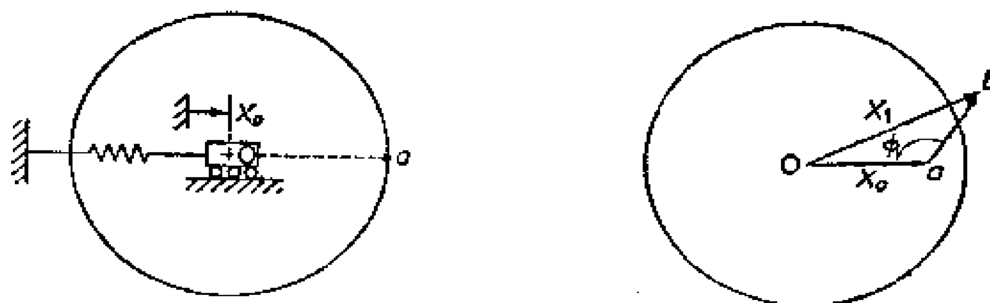


图 3.3-7　进行薄圆盘平衡试验

接着将试验重量w_1加到轮子的任一点，用同样的速度重复上述过程。由原始失衡 w_0 和试验重量w_1产生的新的振幅X_1 和轮位"b"用矢量ob表示。矢量差ab 就是试验重量w_1产生的。现在根据矢量图的角度 ϕ 改变w_1的位置，同时使w_1的数值增加到$w_0(oa/ab)$，矢量 ab与矢量 oa大小相等方向相反，这时因为X_1为零，因此轮便被平衡。

例 3.3-3

一个长转子，可以用在任意二平行平面中附加和移去校正重量的办法进行平衡。通常，校正重量是用两端平面钻孔的办法，即原始的径向离心力 $me\omega^2$ 用二个平行力来移位（每一端面一个）。对于一系列的不平衡质量，可以用同样的方法依靠两端面的合力来得到校正。

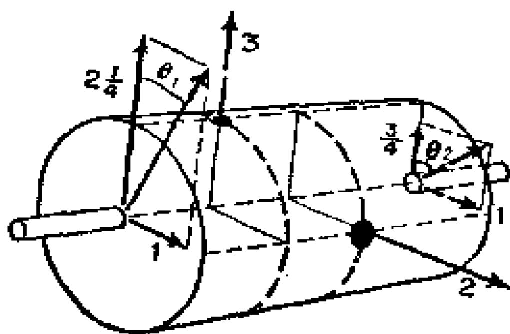


图 3.3-8 校正长转子的两端面失衡

我们考虑 4 英寸长的转子的平衡，如图 3.3-8。在离左端 1 英寸的平面中有一个 3 盎司·英寸的失衡，中间平面有一 2 盎司·英寸的失衡，它与第一个失衡成90°的角偏移。

3 盎司·英寸的失衡相当于左端有2¼盎司·英寸、右端有3/4盎司·英寸，如图示。显然，中间的 2 盎司·英寸的失衡相当于每端有 1 盎司·英寸。因此校准即是把两端失衡加起来。左端面要钻去的是：

$$C_1 = \sqrt{(1)^2 + (2.25)^2} = 2.47 \text{盎司·英寸},$$

位置是从第一失衡平面顺时针转 θ_1角：

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{1}{2.25} = 24°0'$$

右端面要钻去的是：

$$C_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = 1.25 \text{盎司·英寸},$$

位置是从第一失衡平面顺时针转 θ_2 角：

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)} = 53^\circ$$

3.4 转轴的弓状旋曲 (Whiring)

转轴在一定的速度下会趋向于弓状而且会以复杂的形状旋曲。旋曲定义为由弯曲轴线和支承中心线组成的平面的转动。由于各种原因，诸如质量不平衡，轴中的滞后阻尼，陀螺力，轴承中液体摩擦等，都会形成这种现象。轴的旋曲可以发生在轴的转向的同向或反向。旋曲速度可等于或不等于轴的转速。

轴的旋曲是一个难以捉摸的课题。它的一般运动是属于自激运动一类的，在这种运动中，激励力诱发运动而又由运动本身来控制。轴旋曲的一般运动的研究超出本课程的范围。有兴趣的读者可参阅小冈特完成的有关本课题的优秀报告❶。

在这一节中我们将考虑同步旋曲这一最简单情况，在这种情况下，旋曲速度等于轴的转速。为此我们假设一个理想的系统：它是一个质量为 m 的圆盘对称地安装在轴上，轴支承在两个轴承上，如图 3.4-1。盘的质量中心 G 是在从几何中心 S 引出的径向距离 e 处。轴承中心线穿过盘平面的 O 点，轴中心的变位为 OS。在同步旋曲时，O，S 和 G 间保证固定的关系，盘和轴以不变的速度 ω 旋转。用 x_s 和 y_s 代表轴心 S 的位置，质量中心 G 的坐标是 $(x_s + e\cos\omega t)$ 和 $(y_s + e\sin\omega t)$。假定粘性阻尼正比于 S 的速度，则在 x，y 向的运动微分方程为：

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_s + e\cos\omega t) = -kx_s - c\dot{x}_s$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(y_s + e\sin\omega t) = -ky_s - c\dot{y}_s$$

---

❶ Edgar J. Gunter Jr., "Dynamic Stability of Rotor-Bearing Systems," *NASASP*-113, 1966, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. 20402.

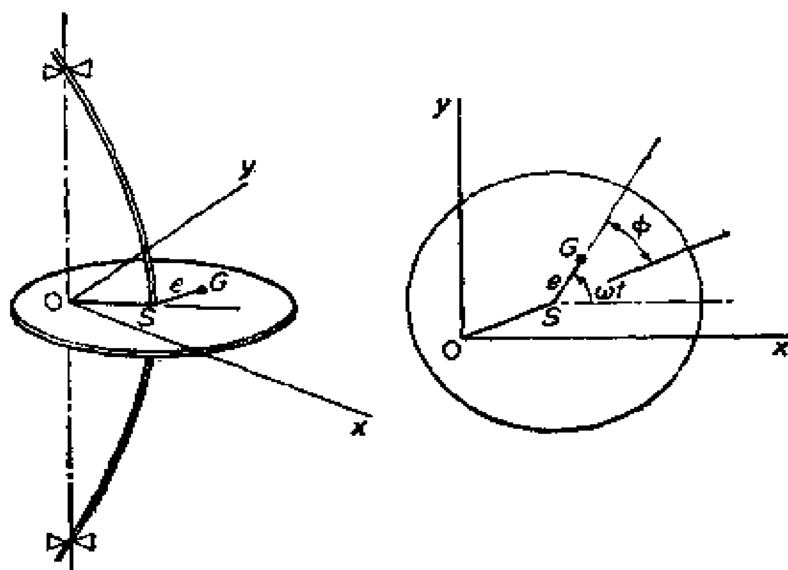


图 3.4-1 由质量不平衡产生的对称旋曲

或

$$m\ddot{x}_s + c\dot{x}_s + kx_s = me\omega^2\cos\omega t$$
$$m\ddot{y}_s + c\dot{y}_s + ky_s = me\omega^2\sin\omega t \qquad (3.4\text{-}1)$$

这些方程与方程（3.3-1）相似，我们用观察法就可以写出它的解：

$$x_s = \frac{me\omega^2\cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$
$$y_s = \frac{me\omega^2\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad (3.4\text{-}2)$$

$$OS = r = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad (3.4\text{-}3)$$

$$\tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad (3.4\text{-}4)$$

显然，线段 $SG = e$ 比位移线段 $OS = r$ 导前一相位角 ϕ，它与阻尼值和转动速度 ω 有关。当旋转速度 ω 等于临界速度 $\omega_n = \sqrt{k/m}$（或轴的横向振动的固有频率）时，出现共振的条件，这时的振幅只是由于阻尼才受到限制。图 3.4-2 表示在三种不同速度条件下的盘-轴系统。

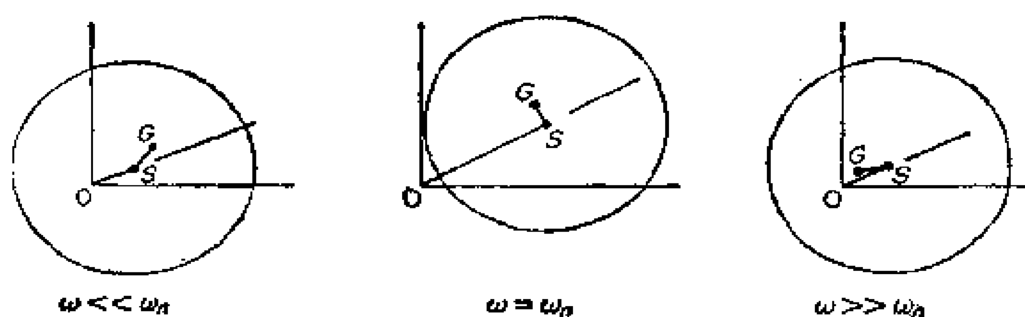


图 3.4-2 具有粘性阻尼的同步旋曲的振幅和相位关系

3.5 支承运动

在很多情况下，动力系统是由支承点的运动而激励的，如图3.5-1。我们令y代表支承点的谐位移，而质量m的坐标x是相对于固定坐标的。

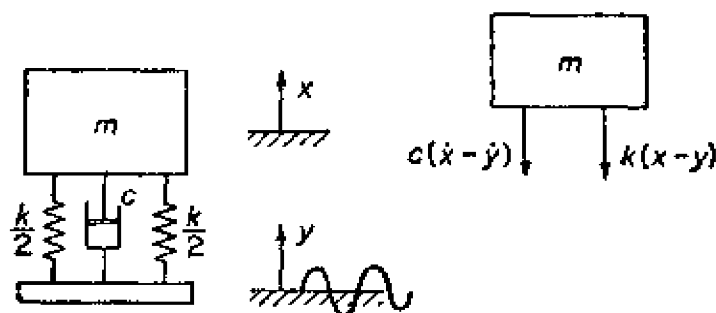


图 3.5-1 由支承运动激励的系统

在位移的位置，不平衡力是由阻尼器和弹簧产生，运动微分方程变为：

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) \qquad (3.5\text{-}1)$$

上式可改写为：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \qquad (3.5\text{-}2)$$

利用复数代数学，我们令

$$y = Ye^{i\omega t}$$

$$x = Xe^{i(\omega t-\phi)} = Xe^{-i\phi}e^{i\omega t} \qquad (3.5\text{-}3)$$

这样可以使位移x和位移y相差一相位角ϕ。把这些公式代入方

程（3.5-2），得：

$$(-m\omega^2+i\omega c+k)Xe^{-i\phi}=(k+i\omega c)Y$$

或

$$\frac{Xe^{-i\phi}}{Y}=\frac{k+i\omega c}{(k-m\omega^2)+i\omega c} \qquad (3.5\text{-}4)$$

因而振幅比的绝对值是：

$$\left|\frac{X}{Y}\right|=\sqrt{\frac{k^2+(\omega c)^2}{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2}}=\sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad (3.5\text{-}5)$$

为了求相位角 ϕ，我们使公式（3.5-4）两边的实数部分和虚数部分各自相等便可确定 $\sin\phi$ 和 $\cos\phi$，然后取两者的比值便得相位角的计算公式：

$$\tan\phi=\frac{mc\omega^3}{k^2\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]+(c\omega)^2}=\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (3.5\text{-}6)$$

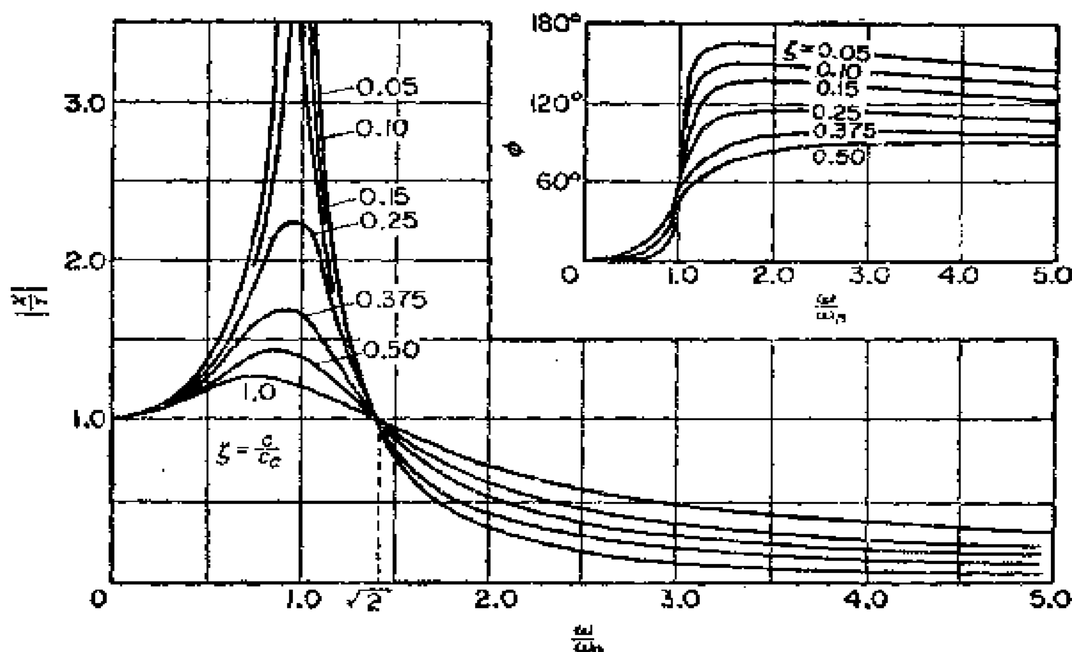


图 3.5-2 方程（3.5-5）和（3.5-6）的图解

确定稳态振幅和相位的方程式（3.5-5）和（3.5-6）画在图3.5-2。从频率曲线图可以看出，在频率比$\omega/\omega_n=\sqrt{2}$时，不管阻尼如何不同，$|X/Y|$总是等于1。

3.6 振动测量仪

图3.6-1表示了振动测量仪最基本的元件。它包括一个支承在弹簧上的振动质量m，弹簧固定在仪器盒子里，仪器盒就固定在振动体上。被测量的运动用y标记，质量m与盒子间的相对运动用$(x-y)$标记。

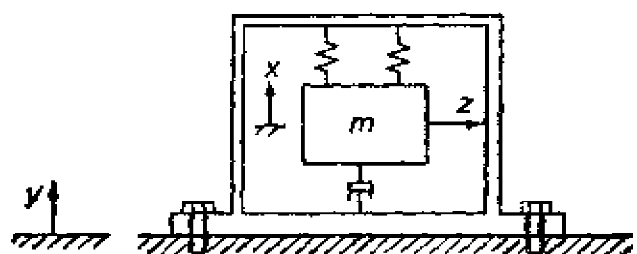


图 3.6-1 振动测量仪的基本元件

为了确定测量仪的特性，我们来研究m的运动方程：

$$m\ddot{x}=-c(\dot{x}-\dot{y})-k(x-y) \tag{3.6-1}$$

令盒子和质量的相对位移为：

$$z=(x-y) \tag{3.6-2}$$

则上面的方程变为：

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=-m\ddot{y} \tag{3.6-3}$$

假定振动体的运动为正弦波$y=Y\sin\omega t$，得运动方程为：

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=mY\omega^2\sin\omega t \tag{3.6-4}$$

这个公式与方程式（3.3-1）的形式相同，但用z和$mY\omega^2$分别代替那里的x和$me\omega^2$。方程的稳态解为$z=Z\sin(\omega t-\phi)$，则根据观察法便可得：

$$Z=\frac{mY\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\frac{Y\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \tag{3.6-5}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega c}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (3.6\text{-}6)$$

图 3.6-2 图解了公式（3.6-5），它与图 3.3-2 相同，但以 Z/Y 代替 MX/me。仪器类型取决于与固有频率相应的频率使用范围。

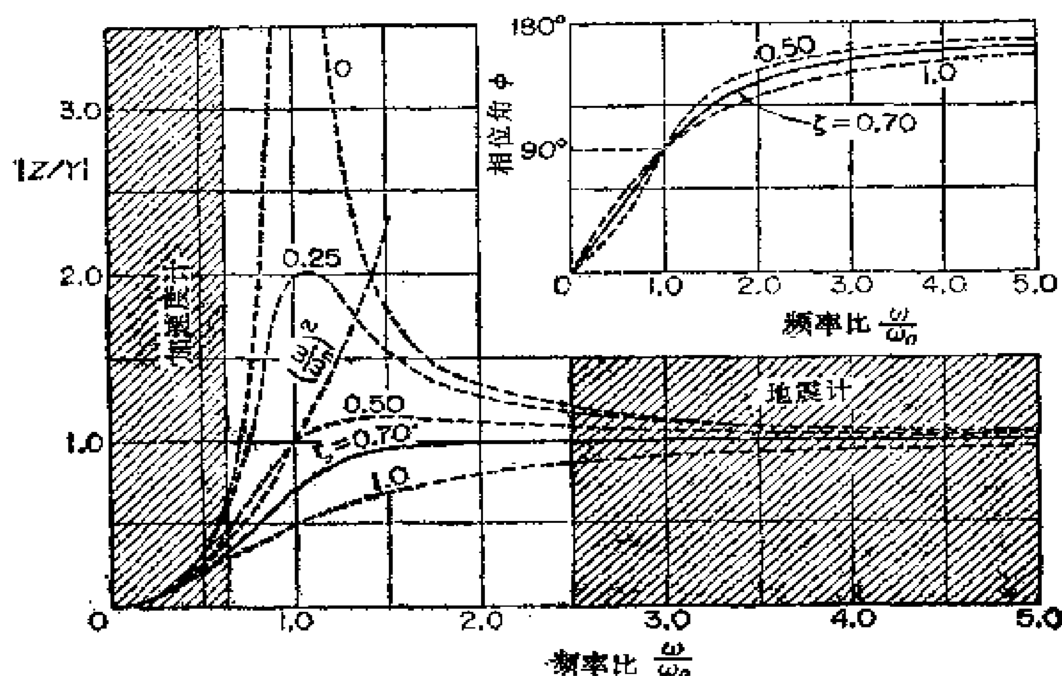


图 3.6-2 振动测量仪的响应

地震测量仪 地震测量仪是一种低固有频率的仪器。这样的频率范围意味着比值 ω/ω_n 大。考察公式（3.6-5）可以指出：当 $\omega/\omega_n \to \infty$ 时相对位移 Z 变成为等于 Y，或 $|Z/Y| = 1.0$。这时质量 m 不动，而支承盒与振动体一起运动。

地震仪的缺点之一是它的尺寸大，因为 $|Z| = |Y|$，故震动质量 m 的相对运动要和被测量的振动是同一数量级的。

通常是使震动质量带动一个电磁铁在固定在盒子体的线圈内移动，这样可以使相对运动转换成电压值。因为电压正比于电磁场的切割速率，因此仪器的输出将正比于振动体的速度。这种类

型的典型仪器，固有频率为 2～5 周/秒，有效的频率范围是10到500周/秒。这种仪器的灵敏度范围大约是 100 毫伏·秒/英寸，位移在0.20英寸以内。

加速度计 今天多数的振动测量仪是加速度计。甚至地震也用加速度计记录，而其速度和位移用积分得到。加速度计优先用作振动测量仪是因为它尺寸小而且灵敏度高。

加速度计是一种高固有频率的仪器，它的有效使用范围是 ω/ω_n 从零到 0.4。考察公式（3.6-5），当 $\omega/\omega_n \to 0$ 时便得到：

$$Z = \frac{\omega^2 Y}{\omega_n^2} = \frac{\text{加速度}}{\omega_n^2} \qquad (3.6\text{-}7)$$

因此 Z 变成正比于被测量的运动的加速度。但是，随着 ω_n 的增加，灵敏度减小了，因此 ω_n 不应超过需要的值。例如，作为地震测量仪广泛应用的加速度计，固有频率是 20 周/秒，它可以精确地再现频率小于 8 周/秒的地壳运动。实际上，高到16周/秒的地壳运动可以根据仪器刻度校正测量之。对大范围的频率，压电晶体加速度计广泛应用。它的固有频率一般是很高的，压电晶体加速度计可用到1000周/秒或更高。

无阻尼加速度计的有效频率范围多少总要受到限制，因为随着 ω 的增加，分母 $1-(\omega/\omega_n)^2$ 很快下降。但是，如有 $\zeta=0.65$～0.70 的阻尼，则 $1-(\omega/\omega_n)^2$ 的减小由附加项 $(2\zeta\omega/\omega_n)^2$ 来抵偿，这样可大大扩大仪器使用范围。

图 3.6-3 对不同的阻尼，用数字标尺画出了下列这个因子：

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad (3.6\text{-}8)$$

多数的加速度计应用阻尼靠近 $\zeta=0.7$，这不仅扩大了有效的频率范围而且防止了相位角的失真。

相位失真 为了不改变相位再现复杂波形，所有的谐波成分的相位角必须沿时间坐标等距离地移动。如果加速度计的相位角 ϕ 的输出随频率成线性增加，这一点就可以实现。例如，对 $\zeta=$

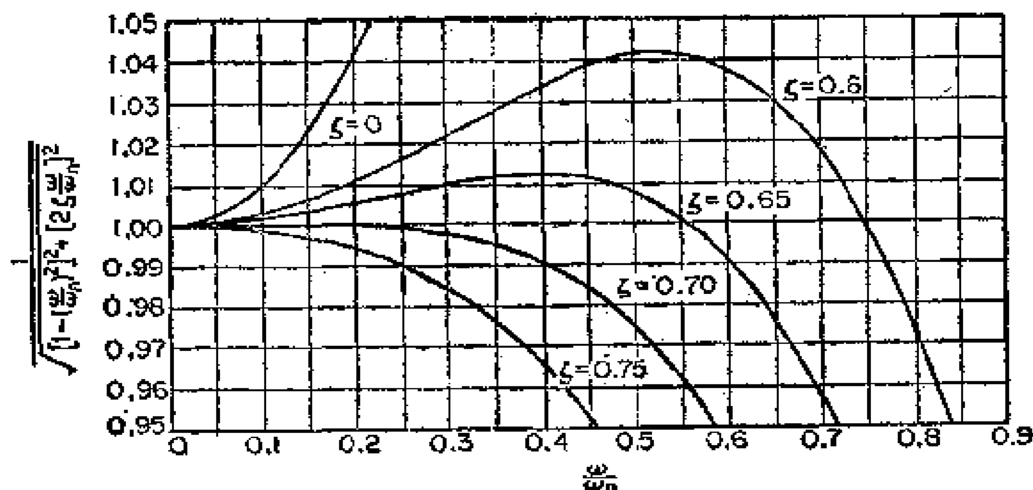


图 3.6-3 加速度计误差与频率关系（以 ζ 为参量）

0.70，就可以大致上满足 $\phi=\pi/2\times\omega/\omega_n$ 的关系，相位失真实际上可以消除。

例 3.6-1

考察阻尼 $\zeta=0.70$ 的加速度计的输出，加速度计用来测定下式给出变位的周期运动：

$$y=Y_1\sin\omega_1 t+Y_2\sin\omega_2 t$$

解：对 $\zeta=0.70$，$\phi\cong\pi/2\times\omega/\omega_n$，因此 $\phi_1=\pi/2\times\omega_1/\omega_n$，$\phi_2=\pi/2\times\omega_2/\omega_n$。因此，加速度计的输出

$$z=Z_1\sin(\omega_1 t-\phi_1)+Z_2\sin(\omega_2 t-\phi_2)$$

把从公式（3.6-7）算出的 Z_1、Z_2 代入上式，得仪器的输出为：

$$Z=\frac{1}{\omega_n^2}\left\{\omega_1^2Y_1\sin\omega_1\left(t-\frac{\pi}{2\omega_n}\right)+\omega_2^2Y_2\sin\omega_2\left(t-\frac{\pi}{2\omega_n}\right)\right\}$$

于是，加速度计无失真地再现了加速度 $\ddot{y}$。

3.7 振动的隔离

由机器和发动机发出的振动力通常是不可避免的，但是采用合适结构的弹簧（隔振器），它对动力系统的作用能有相当程度的降低。

在图3.7-1中，令 $F_0\sin\omega t$ 为作用在单自由度系统上的激励力。通过弹簧和阻尼器传递的力是：

$$F_T=\sqrt{(kX)^2+(c\omega X)^2}=kX\sqrt{1+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}\qquad(3.7\text{-}1)$$

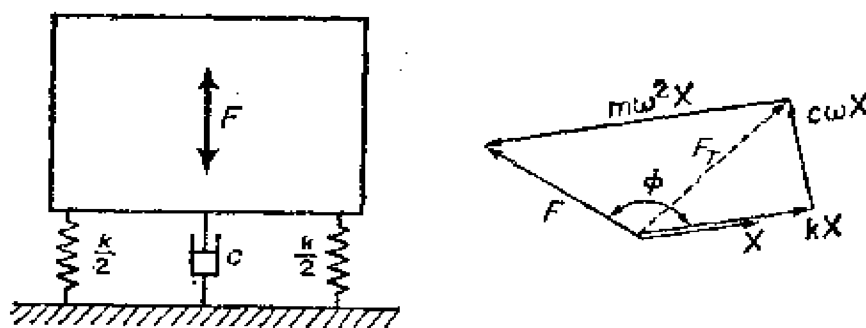


图 3.7-1　通过弹簧和阻尼器传递的干扰力

因为由 $F_0\sin\omega t$ 产生的振幅 X 由公式（3.2-5）给出，因此上式简化为：

$$F_T=\frac{F_0\sqrt{1+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\frac{m\omega^2}{k}\right]^2+\left[\frac{c\omega}{k}\right]^2}}=\frac{F_0\sqrt{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}\qquad(3.7\text{-}2)$$

比较公式（3.7-2）和（3.5-5）可以看出，$|F_T/F_0|$ 与 $|X/Y|=|\omega^2X/\omega^2Y|$ 相同。因此，质量和支承点运动隔离的问题与隔离干扰力都属于同一性质的问题。我们把上述两个比值称之为“传递率”。图3.5-2的纵坐标表示力或位移的传递率。这些曲线说明，只有当 $\omega/\omega_n>\sqrt{2}$ 时，传递率才小于1。因此，可以确认这样的事实：振动的隔离只有在 $\omega/\omega_n>\sqrt{2}$ 才有可能。从图3.5-2可以看出，在 $\omega/\omega_n>\sqrt{2}$ 的区域，在减小传递率方面，无阻尼弹簧将比有阻尼弹簧优越。但是，当 ω 可能变到共振区时，有一些阻尼还是合适的，尽管在共振时巨大的振幅可以用挡止器加以限制。

当阻尼可以忽略时，传递率方程简化为：

$$TR=\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-1} \tag{3.7-3}$$

而且，不言而喻，在这里使用的ω/ω_n值总是大于$\sqrt{2}$。还可以进一步把ω_n^2改写为g/Δ''，这里$g=386$英寸/秒^2，$\Delta''=$以英寸表示的静变位。于是公式（3.7-3）可以表示为：

$$TR=\frac{1}{\frac{(2\pi f)^2\Delta}{g}-1} \tag{3.7-4}$$

式中f是频率，如f以每分钟一循环计算，我们可得下式：

$$f=188\sqrt{\frac{1}{\Delta''}\left(\frac{1}{TR}-1\right)}\ ,\qquad f=188\sqrt{\frac{1}{\Delta''}\left(\frac{2-R}{1-R}\right)} \tag{3.7-5}$$

在这里我们定义$R=(1-RT)$为"减震率"。图3.7-2图示了公式（3.7-5）中f与Δ''的关系（以R作为参量）。

这里讨论的情况只适用于物体沿一个坐标移动的情况。一般说，一个刚体有六个自由度，即可以沿三个垂直的坐标作三个方向移动和绕三个方向转动。对这些更高一级的问题，读者可参考C.克利德的有关振动隔离方面的杰出的教程●。

例　3.7-1

一台重200磅的机器支承在总刚度为4000磅/英寸的弹簧上，它有一失衡的转动元件在3000转/分下形成80磅的干扰力。假定阻率$\zeta=0.20$，求：（a）由失衡引起的运动振幅；（b）传递率；（c）传递的力。

解：系统的静变位是200/4000＝0.05英寸，它的固有频率是：

$$f_n=\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{0.05}}=841\text{周/分}$$

（a）把参数代入公式（3.2-7），振幅为：

● C.E.Crede, *Vibration and Shock Isolation* (New York: John Wiley & Sons, 1951).

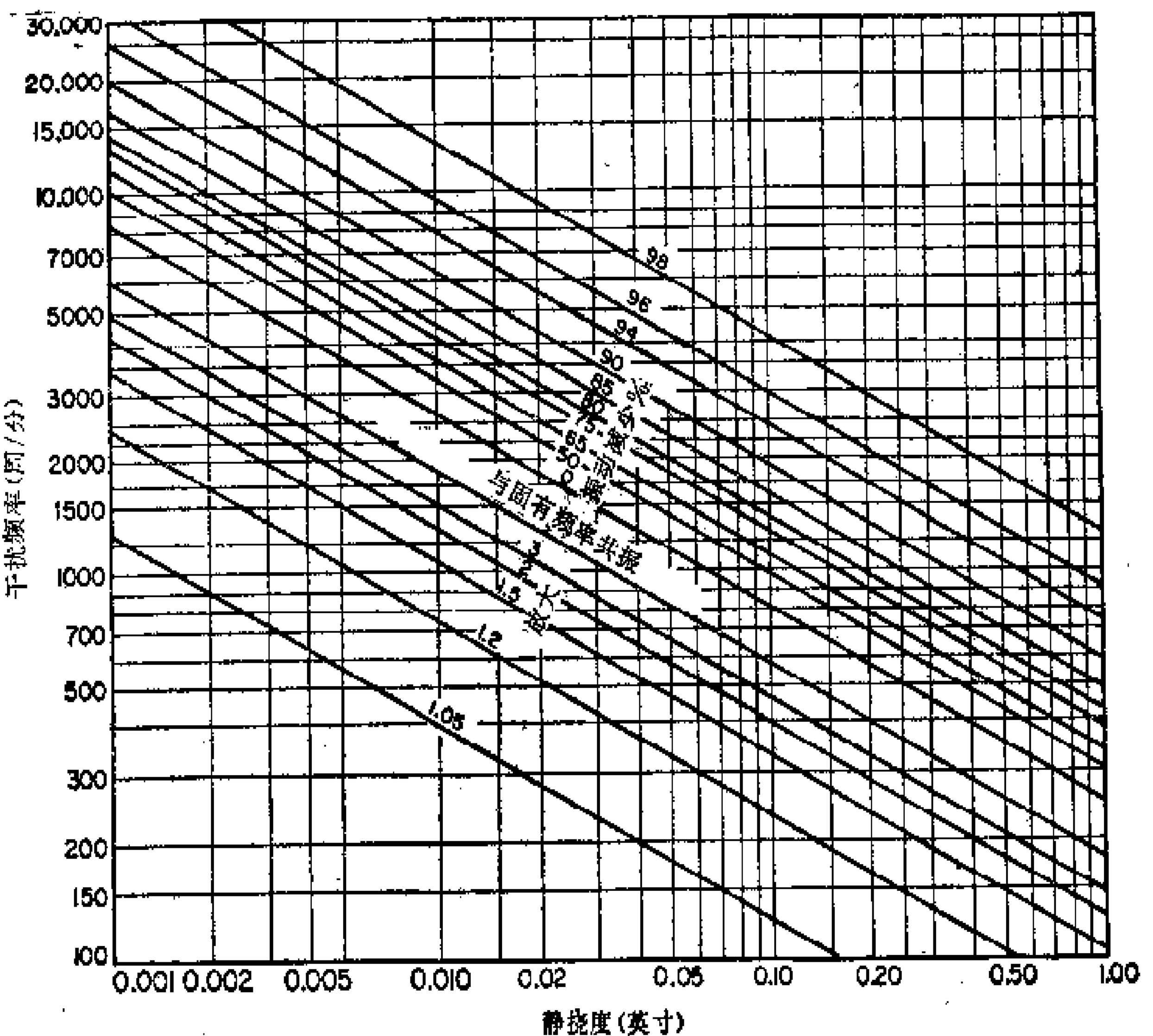


图 3.7-2 柔性安装系统的隔离效率

$$X=\frac{\frac{80}{4000}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{3000}{841}\right)^2\right]^2+\left[2\times0.20\frac{3000}{841}\right]^2}}=0.00169\text{英寸}$$

（b）根据公式（3.6-2），传递率为：

$$TR=\frac{\sqrt{1+\left(2\times0.20\times\frac{3000}{841}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{3000}{841}\right)^2\right]^2+\left[2\times0.20\times\frac{3000}{841}\right]^2}}=0.148$$

（c）被传递的力等于干扰力乘以传递率：

$$F_{TR}=80\times0.148\approx11.8\text{磅}$$

3.8 阻尼

阻尼在所有振荡系统中都存在。它起了消耗系统能量的作用。振动系统的能量消耗变成热或发射出去。能量消耗成热可由金属片多次的反复弯曲而体验到。我们可以感觉到从猛烈冲击物体处发射出的声响。当一个浮标在水中上下沉浮时，发出水波并消散开，因而就形成能量的损失。

在振动分析中，我们通常是从系统响应这个角度来考虑阻尼的。由于系统的能量损失，引起了自由振动振幅的衰减。在稳态强迫振动中，能量的损耗是由外加的激励能来平衡的。

一个振动系统可能遇见多种不同类型的阻尼力，如分子内部滑动摩擦阻力和液体阻抗。一般说来，要用数学方法来描述这些是很复杂的，而且不适合于振动分析。因此，曾提出简化的阻尼模型，它在估算系统响应时，在很多情况下是合适的。例如，我们曾应用了以阻尼器标记的粘性阻尼模型，就易于得到数学解。

能量的消散一般按一个振荡循环条件来定。根据存在的阻尼类型，画出的力-位移关系将有很大差别。但在所有情况下，力-位移曲线将画成封闭圈，这个封闭圈称之为滞后圈，它的面积正比于每一循环消耗的能量。每一循环由阻尼消耗的能量可按下面的一般公式计算：

$$W_d = \oint F_d dx \qquad (3.8\text{-}1)$$

在一般情况下，W_d将与很多因素有关，如温度，频率或振幅。

在这一节，我们将考虑能量消耗的最简单情况，即粘性阻尼的弹簧-质量系统的能量消耗。在这种情况下，阻尼力是$F_d = C\dot{x}$，对于稳态位移和稳态速度

$$x = X\sin(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = \omega X\cos(\omega t - \phi)$$

根据公式（3.8-1），每一循环的能量消耗为：

$$W_d = \oint c\dot{x}dx = \oint c\dot{x}^2 dt$$

$$= c\omega^2 X^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - \phi)dt = \pi c\omega X^2 \qquad (3.8\text{-}2)$$

特别重要的是强迫振动在共振区消耗的能量。把$\omega_n = \sqrt{k/m}$和$c = 2\zeta\sqrt{km}$代入上式，就得出共振时的能量损失公式：

$$W_d = 2\zeta\pi k X^2 \qquad (3.8\text{-}3)$$

阻尼力在每一循环消耗的能量可用下述图解法表示。把速度写成如下形式：

$$\dot{x} = \omega X\cos(\omega t - \phi) = \pm\omega X\sqrt{1 - \sin^2(\omega t - \phi)}$$

$$= \pm\omega\sqrt{X^2 - x^2}$$

阻尼力成为：

$$F_d = c\dot{x} = \pm c\omega\sqrt{X^2 - x^2} \qquad (3.8\text{-}4)$$

把上式重写成如下形式：

$$\left(\frac{F_d}{c\omega X}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1 \qquad (3.8\text{-}5)$$

我们知道，这是用F_d和x为垂直轴和水平轴画成的椭圆，如图3.8-1 a。因此，每一循环消耗的能量是这个椭圆围成的面积。如果在F_d上加上弹簧力kx（不消耗能量），则滞后圈便转过一角度，如图3.8-1b。因此，这个表示法与弹簧和阻尼器平行而构成的所谓伏依特（Voigt）模型是一致的。材料的特性服从于很多不同

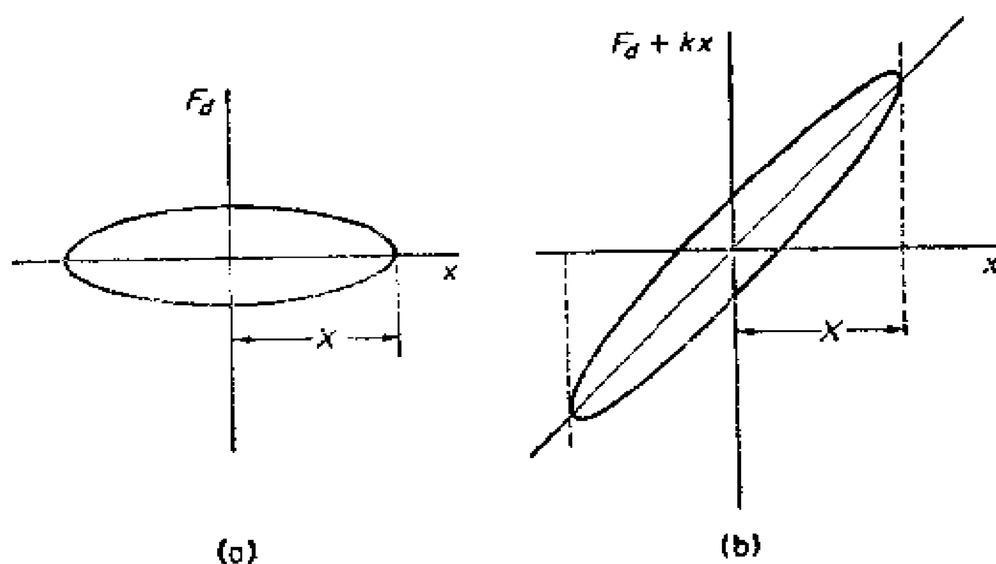


图 3.8-1 粘性阻尼的能量消耗

的方式，视应用它的技术领域之不同而定。我们这里引用其中常用的两种相对能量单位。第一个是所谓比阻能，它等于每一循环的能量损失W_d与尖峰位能U之比值：

$$\frac{W_d}{U} \tag{3.8-6}$$

第二个是损失系数，它等于每一弧度的能量损耗$W_d/2\pi$与尖峰势能（变形势能）U之比：

$$\eta = \frac{W_d}{2\pi U} \tag{3.8-7}$$

对于线性阻尼，能量损失正比于变形或振幅的平方，滞后曲线是一个椭圆。

对多数材料，损失系数变化在 0.001 到 1 之间，与材料及试验条件有关。当阻尼损失不是变形或振幅的平方函数时，滞后曲线不是一个椭圆，而且损失系数可以从0.001到近似值0.2之间变化。

例 3.8-1

求力$F = F_0\sin(\omega t + \phi)$作用在位移 $x = X_0\sin\omega t$ 上的功率表达式。

解：功率就是单位功，即力和速度的乘积：

$$P = F\frac{dx}{dt} = (\omega X_0 F_0)\sin(\omega t+\phi)\cos\omega t$$
$$= (\omega X_0 F_0)[\cos\phi\cdot\sin\omega t\cos\omega t + \sin\phi\cdot\cos^2\omega t]$$
$$= \frac{1}{2}\omega X_0 F_0[\sin\phi + \sin(2\omega t+\phi)]$$

上式的第一项是常数，表示单位时间中功的稳定流。第二部分是倍频正弦波，表示功率的变化部分，它对任意以周期为整数倍的时间区间的平均值为零。

例　3.8-2

一个$F=10\sin\pi t$磅的力，作用在$x=2\sin(\pi t-\pi/6)$的位移上，请确定：(a)开始6秒所做的功；(b)开始$\frac{1}{2}$秒所做的功。

解：把方程式(3.8-1)改成为$W=\int F\dot{x}dt$，并把$F=F_0\sin\omega t$和$x=X\sin(\omega t-\phi)$代入，即得每一循环所做的功：

$$W=\pi F_0 X\sin\phi$$

本题给出的力和变位是：$F_0=10$，$X=2$；$\phi=\pi/6$，周期$\tau=2$秒。因此(a)中所规定6秒所做的功就是三个整循环所做的功：

$$W=3(\pi F_0 X\sin\phi)=3\pi\times10\times2\times\sin30°=94.2\ \text{英寸·磅}$$

(b)中所做的功，要把做功的方程式在0到1/2秒之间积分。

$$W=\omega F_0 X_0\left[\cos30°\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi t\cos\pi t dt+\sin30°\int_0^{\frac{1}{2}}\sin^2\pi t dt\right]$$
$$=\pi\times10\times2\left[-\frac{0.866}{4\pi}\cos2\pi t+0.50\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin2\pi t}{4\pi}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=16.51\ \text{英寸·磅}$$

3.9　等效粘性阻尼

阻尼对振荡系统的主要影响是限制共振时的响应幅度。正如从图3.2-3的响应曲线所看到的，阻尼对那些远离共振区频率的响应的影响很小。

在粘性阻尼情况下在共振时的振幅，我们已从方程式（3.2-9）得到：

$$X = \frac{F_0}{c\omega_n} \qquad (3.9\text{-}1)$$

对其它阻尼形式，没有这样简单的公式。但是可以用等效阻尼c_{eq}代替上式的c，从而得到近似的共振振幅计算公式。

等效阻尼c_{eq}可以用这样的方法求得：假定系统是谐运动，然后令粘性阻尼消耗的能量等于非粘性阻尼力所做的功。从方程（3.8-2）得：

$$\pi c_{eq}\omega X^2 = W_d \qquad (3.9\text{-}2)$$

式中W_d必须根据具体的阻尼力进行计算。

例　3.9-1

一个以中等速度（10～50英尺/秒）在流体中（如水或空气）运动的物体，受到了阻尼力的抵抗，阻尼力正比于速度的平方。请确定象这样的力作用到振荡系统时的等效阻尼并找出它的共振振幅。

解：令阻尼力由下式表示：

$$F_d = \pm a\dot{x}^2$$

式中负号用在当$\dot{x}$为正时，反之亦然。

假定谐运动的时间是从下列负位移的极限位置开始：

$$x = -X\cos\omega t$$

每一循环消耗的能量：

$$W_d = 2\int_{-x}^{x} a\dot{x}^2 dx = -2a\omega^2 X^3\int_0^{\pi}\sin^3\omega t d(\omega t)$$

$$= -\frac{8}{3}a\omega^2 X^3$$

根据公式（3.9-2），等效粘性阻尼是

$$c_{eq} = -\frac{8}{3\pi}a\omega X$$

把$c = c_{eq}$代入公式（3.9-1）并以$\omega = \omega_n$，可得共振时的振幅：

$$X=\sqrt{\frac{3\pi F_0}{8a\omega_n^2}}$$

例　3.9-2

一个以激励力$F_0\sin\omega t$强制振动的振荡系统，已知作用有一系列不同形式的阻尼，试建立等效阻尼的公式并指出求共振振幅的过程。

解：令U_1、U_2、U_3……等是由不同的阻尼力在每一循环中消耗的能量，把总的消耗能量等于等效粘性阻尼作的功：

$$\pi c_{eq}\omega X^2=U_1+U_2+U_3+\cdots$$

便得等效粘性阻尼系数：

$$c_{eq}=\frac{\Sigma U}{\pi\omega X^2}$$

为了确定振幅，必须得到U_1、U_2、U_3等的表达式，而这些表达式包含产生各种功率的X，把c_{eq}代入下式

$$X=\frac{F_0}{c_{eq}\omega}$$

并使$\omega=\omega_n$就可解出X的值。

3.10　结构阻尼

当材料受到循环应力时，能量在材料内部便被消耗。许多研究者❶❷的实验指出，对多数结构金属，如钢或铝，每一循环消耗能量在一广泛频率范围内与频率无关，而且与振幅的平方成正比。这种类型的内部阻尼被称为固体阻尼或结构阻尼。由于每循环的能量消耗正比于振幅的平方，因此，损失系数是常数，而且滞后曲线的形状与振幅保持不变，而与变形率无关。

由结构阻尼消耗的能量，可以写成：

$$W_d=aX^2 \qquad (3.10\text{-}1)$$

❶ Kimball, A.L. "Vibration damping, including the case of solid damping," Trans.ASME, APM 51-52, (1929).

❷ Lazan, B.J. "Damping of Materials and Members in Structural Mechanics" Pergamon Press, (1968).

式中a为常数。利用等效粘性阻尼的概念，根据方程式(3.9-2)得：

$$\pi c_{eq}\omega X^2 = aX^2$$

或

$$c_{eq} = \frac{a}{\pi\omega} \tag{3.10-2}$$

用c_{eq}取代c，则具有结构阻尼系统的运动微分方程可以写成：

$$m\ddot{x} + \frac{a}{\pi\omega}\dot{x} + kx = F(t) \tag{3.10-3}$$

复刚度 在计算机翼和机尾表面颤动速度时，要用到复刚度概念。假定振荡是谐运动，方程（3.10-3）可写成：

$$m\ddot{x} + \left(k + i\frac{a}{\pi}\right)x = F_0 e^{i\omega t}$$

令$\gamma = a/\pi k$并把共因子k提出，上式便可改为：

$$m\ddot{x} + k(1 + i\gamma)x = F_0 e^{i\omega t} \tag{3.10-4}$$

量$k(1 + i\gamma)$称之为复刚度，γ是结构阻率。

在结构振动问题中应用复刚度概念的优点在于：只需在系统方程的刚度项乘上（$1 + i\gamma$）就可以了。但是，这个方法只有对谐运动才是合适的。应用解$x = \overline{X}e^{i\omega t}$，从方程（3.10-4）得稳态振幅为：

$$\overline{X} = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + i\gamma k} \tag{3.10-5}$$

共振振幅是：

$$|X| = \frac{F_0}{\gamma k} \tag{3.10-6}$$

与粘性阻尼系统的共振响应

$$|X| = \frac{F_0}{2\zeta k}$$

比较后可以得知，要使共振振幅相等，结构阻率是粘性阻率的二倍。

3.11 共振的锐度

在强迫振动中，有一个有关阻尼的量Q是用来度量共振的锐度的。为了确定这个量，我们将假定是粘性阻尼并从方程（3.2-7）开始。

当$\omega/\omega_n=1$时，共振振幅是$X_{res}=(F_0/k)/2\zeta$。现在我们在共振的两侧找出$X=0.707X_{res}$的两个频率（常常叫做边频带）。这两个点也叫做半功率点，表示在图3.11-1。

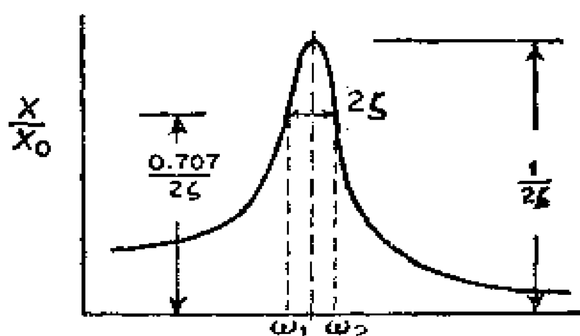


图 3.11-1

令$X=0.707X_{res}$，把它代入方程（3.2-7），得：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)^2=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

或

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4-2(1-2\zeta^2)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+(1-8\zeta^2)=0 \quad (3.11\text{-}1)$$

解出$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$，得：

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=(1-2\zeta^2)\pm2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \quad (3.11\text{-}2)$$

假定$\zeta\ll1$，略去ζ的高阶项，我们得下面的结果：

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=1\pm2\zeta \quad (3.11\text{-}3)$$

令相应于方程（3.11-3）的两个频率为ω_1，ω_2，我们得：

$$4\zeta=\frac{\omega_2{}^2-\omega_1{}^2}{\omega_n^2}\cong 2\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_n}\right)$$

于是Q值定义为：

$$Q=\frac{\omega_n}{\omega_2-\omega_1}=\frac{f_n}{f_2-f_1}=\frac{1}{2\zeta} \qquad (3.11\text{-}4)$$

而且，对于其它阻尼，可以用等效阻尼来计算Q值。因此，对结构阻尼，Q值等于：

$$Q=\frac{1}{\gamma} \qquad (3.11\text{-}5)$$

习　　题

3-1　一个机器部件重4.3磅，在粘性介质中振动，在谐激励力5.5磅的作用下，产生共振振幅0.50英寸，周期0.2秒，求在此情况下的阻尼系数。

3-2　题3-1的系统，但谐激励力的频率为4周/秒，并去掉阻尼器，强迫振动的振幅要增加百分之几？

3-3　一重物悬挂在刚度为3.0磅/英寸的弹簧上并具有粘性阻尼装置。当重物挂上取下时，测得振动周期为1.80秒，两相邻振幅的比为4.2比1.0。求当$F=2\cos3t$作用在系统上时，系统的振幅和相位。

3-4　请证明阻尼弹簧质量系统的尖峰振幅出现在下式给定的频率比：

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_P=\sqrt{1-2\zeta^2}$$

3-5　一弹簧质量系统受激励力$F_0\sin\omega t$的作用，在共振时的振幅测得为0.80英寸，在0.8共振频率时振幅为0.46英寸，求系统的阻尼系数c（提示：假定在0.80共振时，阻尼项略去）。

3-6　一个绕它的几何轴心旋转的圆盘，通过盘钻A、B二孔。孔的直径和位置是：$d_A=1.0$英寸，$r_A=3.0$英寸，$\theta_A=0$度；$d_B=1/2$英寸，$r_B=2.0$英寸，$\theta_B=90$度。问：要在半径为1英寸圆周的何处钻一个多大直径的孔可以平衡圆盘？

3-7　图P.3-7所示的双圆柱曲轴的曲柄和销轴相当于偏心距为r（英寸）、重量为W（磅）的偏心块。求在两个飞轮半径为r处所需的平衡重。

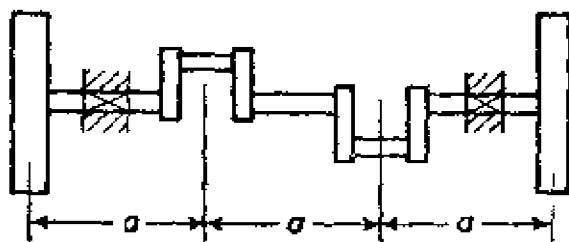


图 P.3-7

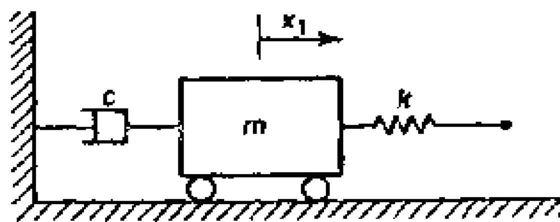


图 P.3-8

3-8 对图P.3-8的系统，请用复数代数学的方法求运动方程，并解出稳态振幅和相位角。

3-9 图P.3-9表示一相对转动的偏心激振器，它用来测定重为400磅的结构振动特性。当速度为900转/分时，闪光测频仪指出：当结构向上移动通过它的静平衡位置时，偏心块到达顶点，相应的振幅为0.85英寸。如每一个激振器轮子的失衡为4磅·英寸求：

(*a*) 结构的固有频率；(*b*) 结构的阻率；(*c*) 当1200转/分时的振幅；(*d*) 结构向上移动通过它平衡位置的瞬间，偏心重所处的角度。

3-10 一实心圆盘重10磅，被紧固在直径为1/2英寸的钢轴上，支承间距为2英尺，求最低临界速度（假定轴是简支的）。

3-11 一重30磅的透平转子支承在支点间距为16英寸的轴的跨中，如图P.3-11。已知转子有4盎司-英寸的失衡，钢轴的直径为1英寸，转轴的速度为6000转/分。求作用在支承上的力。如果转子相同但安装

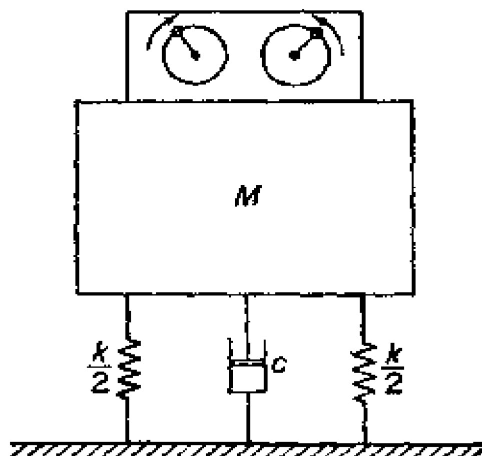


图 P.3-9

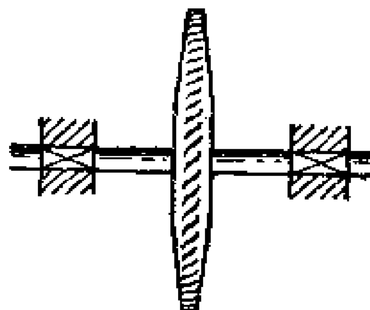


图 P.3-11

在轴径为3/4英寸的轴上，结果如何？请比较(假定支承为简支)。

3-12 请证明：如果阻尼很小，那么临界转速下轴的横向振动振幅按下式：

$$r=\frac{e}{2\zeta}(1-e^{-\zeta\omega_n t})$$

式中e是偏心距。

3-13 对于在临界转速之上工作的透平机，装设有挡止器以限制在临界速度运转时轴的振幅。在题3-11中的透平，如果1英寸的轴与挡止器间的间隙是0.02英寸，偏心距为1/120英寸，求轴碰到挡止器所需的时间(假定临界速度是在零振幅时开始的)。

3-14 图P.3-14表示弹簧支承的车轴沿高低不平的道路运行。请求出W的振幅与速度的关系式，并确定最不利的运行速度。

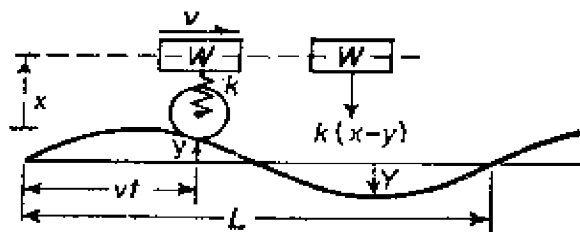


图 P.3-14

3-15 汽车拖车的弹簧在负载下被压缩4英寸，请找出当拖车沿路面轮廓为近似正弦波（波幅3.0英寸，波长48英尺）的道路上运行时的临界速度。如果行驶速度为40英里/小时，振幅是多少？（略去阻尼）。

3-16 图P.3-16表示一质量为m的油缸与刚度为k的弹簧联系，通过粘性摩擦c以运动规律$y=A\sin\omega t$的活塞给予激励，求油缸运动的振幅以及它相对于活塞的相位。

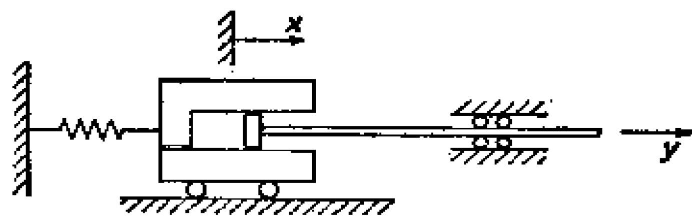


图 P.8-16

3-17 一个单摆的支承点按给定的谐运动$x_0=X_0\sin\omega t$沿水平线运动，如图

P.3-17。请按图示坐标写出小振幅时摆的运动微分方程式，求对x/x_0的解；证明：当$\omega=\sqrt{2}\omega_n$时节点在l的中点；证明：在一般情况下质量到节点的距离h按下式关系：

$$h=l\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2,\quad 式中\omega_n=\sqrt{g/l}$$

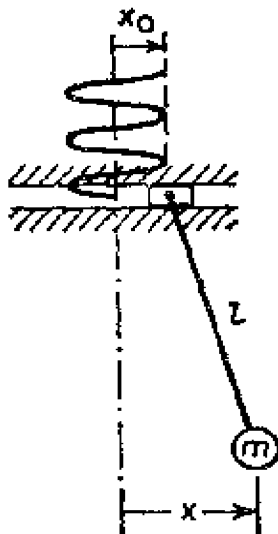


图 P.3-17

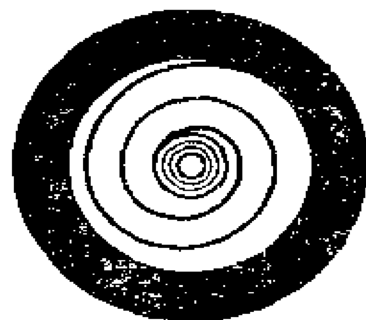


图 P.3-20

3-18 一个工业型的拾音器，固有频率为4.75周/秒，阻率$\zeta=0.65$。问：在下列误差下能测出的最低频率是多少？（*a*）百分之一误差；（*b*）百分之二误差？

3-19 一个无阻尼拾音器，固有频率为1周/秒，用来测定4周/秒的谐振。如果拾音器显示的振幅（拾音器质量与外壳间相对振幅）是0.052英寸，正确的振幅是多少？

3-20 图P.3-20所示的扭力计的轴承受扭转谐振$\theta_0\sin\omega t$，求外轮相对于轴以及固定参考点的相对振幅的表达式。

3-21 请从限制复杂波相位失真观点讨论地震仪的要求。

3-22 重65磅的冷冻器组件支承在每根刚度为k(磅/英寸)的三根弹簧上。组件以580转/分运转，如果只有10%的冲击传到支承结构，那么弹簧常数k值应是多少？

3-23 一台机器重1000磅，支承在静变形为0.2英寸的弹簧上，若机器的旋转失衡为20磅·英寸，求：（*a*）在1200转/分时传给地面的力；（*b*）在

同一速度下的动振幅(假定阻尼可以忽略)。

3-24 如果题3-23的机器安装在重2500磅的大混凝土基础上，它下面的弹簧或弹性垫的刚度增加到变位为0.20英寸，则动振幅将是多少?

3-25 一个重24磅的飞机无线电要与发动机的频率从1600到 2200 转/分范围的振动隔离。问：为了隔离85%，隔离器的静变位需要多少?

3-26 证明对于粘性阻尼，损失系数η与振幅无关而与频率成正比。

3-27 请把单自由度系统的自由振动方程表示为共振时的损失系数η的函数。

3-28 证明τ_n/τ_d对ζ的图解是一个圆，这里τ_n是无阻尼固有周期，τ_d是阻尼固有周期。

3-29 证明对粘性摩擦，每一循环消耗的能量可以表示为：

$$W_d=\frac{\pi F_0{}^2}{k}\cdot\frac{2\zeta}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

3-30 要使每一循环消耗的能量与频率比 ω/ω_n无关，需要的阻尼是多少?

3-31 对小阻尼，每一循环消耗的能量除以尖峰位能等于 2δ，也等于 $1/Q$ (看公式3.8-6)。对于粘性阻尼，证明

$$\delta=\frac{\pi c\omega_0}{k}$$

3-32 通常每一循环的能量损失是振幅和频率的函数。在什么条件下对数衰减率δ与振幅无关?

3-33 干燥表面间的库仑阻尼是常数D，它总是与运动反向。求等效粘性阻尼系数。

3-34 利用题3-33的结果，求弹簧质量系统在库仑摩擦和谐激励力$F_0\sin\omega t$作用下的振幅。问：在什么条件下运动能继续?

3-35 对于结构阻尼，假定刚度是复量形式$k=ke^{i2\beta}$，求在谐激励下的响应方程。

3-36 证明$\delta=\pi(f_2-f_1)/f_r$，这里f_1，f_2是相应于共振曲线上两个半功率点的频率。

第四章 瞬 态 振 动

4.1 导引

当一动力系统受到一个如图 4.1-1 所示的突加的非周期力 $F(t)$激励时，通常不会产生稳态振荡过程。这种激励产生的响应称之为瞬态响应。这种振荡是在系统固有频率下发生的，它的振幅将按照激励的类型而变化。

我们首先研究一弹簧-质量系统在脉冲激励下的响应，因为这一情况对理解更一般的瞬态问题是很重要的。

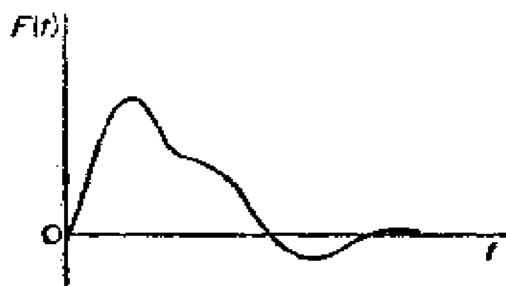


图 4.1-1 非周期激励力

4.2 脉冲激励

冲量是力对时间的积分，我们用符号$\hat{F}$来标记：

$$\hat{F} = \int F(t)dt \qquad (4.2-1)$$

我们经常遇见一种作用时间很短、数值很大的力，但它对时间的积分是有限值。这种力称之为冲击力。

图4.2-1表示数值为$\hat{F}/\varepsilon$、作用时间为ε的冲击力。当ε趋于零时，则这个力就趋于无穷大。但是由这个力的时间积分所定义的冲量是有限量。当$\hat{F}$等于一个单位时，在极限情况$\varepsilon \to 0$时，

这种力就称之为单位脉冲或δ-函数。在$t=\xi$时的δ-函数用符号$\delta(t-\xi)$标记，它具有下列性质：

$$\left.\begin{aligned}&\delta(t-\xi)=0 && \text{对所有}\xi\neq t\text{时；}\\&\delta(t-\xi)>\text{任意给定值} && \text{对}\xi=t\text{时；}\\&\int_0^\infty\delta(t-\xi)dt=1.0 && \text{对 }0<\xi<\infty\end{aligned}\right\}\quad(4.2\text{-}2)$$

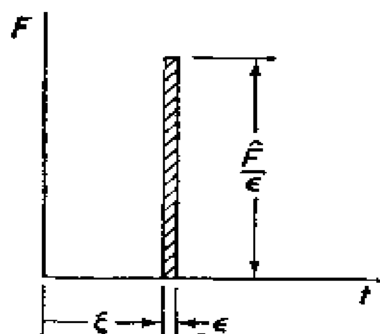


图 4.2-1

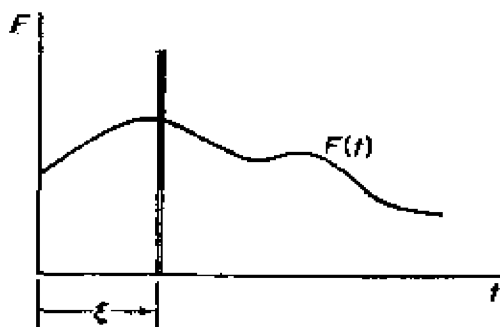


图 4.2-2

如果$\delta(t-\xi)$乘以任意时间函数$f(t)$（如图4.2-2）则它们的积除了在$t=\xi$点外全部为零，因而它们乘积的时间积分将是：

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-\xi)dt=f(\xi)\qquad\text{当 }0<\xi<\infty$$

(4.2-3)

因为$Fdt=mdv$，作用于质量的冲量$\hat{F}$将使其产生数值为$\hat{F}/m$的速度突然变化，而位移无明显的变化。我们曾经得到了初始条件为$x(0)$和$\dot{x}(0)$的单自由度弹簧质量系统的自由振动方程：

$$x=\frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t+x(0)\cos\omega_n t$$

因此，初始条件为静止时，弹簧-质量系统在冲量$\hat{F}$的激励下的响应是：

$$x=\frac{\hat{F}}{m\omega_n}\sin\omega_n t\qquad(4.2\text{-}4)$$

式中

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

当有阻尼时，可从自由振动方程

$$x = Xe^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t - \phi)$$

着手。把上述初始条件代入，我们得到：

$$x = \frac{\hat{F}}{m\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t \qquad (4.2\text{-}5)$$

单位脉冲的响应对瞬态方程是重要的，我们用专门的符号 $g(t)$ 来标记。这样，对阻尼或无阻尼情况，脉冲响应的方程可用下列形式表示：

$$x = \hat{F}g(t) \qquad (4.2\text{-}6)$$

这里，方程右面部分由方程（4.2-4）或（4.2-5）给出。

4.3 任意激励

得到单位脉冲激励的响应 $g(t)$，就可能建立在任意力 $f(t)$ 激励下系统的响应方程式。为此，我们把任意力看成是一系列脉冲，如图4.3-1。如果我们考察时间 $t=\xi$ 的一个脉冲（斜线部分），它的强度是：

$$\hat{F} = f(\xi)\Delta\xi$$

它在时间 t 产生的响应成份与经过的时间间隔（$t-\xi$）有关，即为：

$$f(\xi)\Delta\xi g(t-\xi)$$

由于我们所考虑的是线性系统，故叠加原理有效。把所有的这样的响应成份叠加起来，就得到任意激励 $f(t)$ 产生的响应，它可用下列积分表示：

$$x(t) = \int_0^t f(\xi)g(t-\xi)d\xi \qquad (4.3\text{-}1)$$

上面这个积分称之为**卷积积分**，有时又叫做**重叠积分**。

这个方程的另一形式是令 $\tau=(t-\xi)$ 代入而得，即 $\xi=t-\tau$，$d\xi=-d\tau$，从此得：

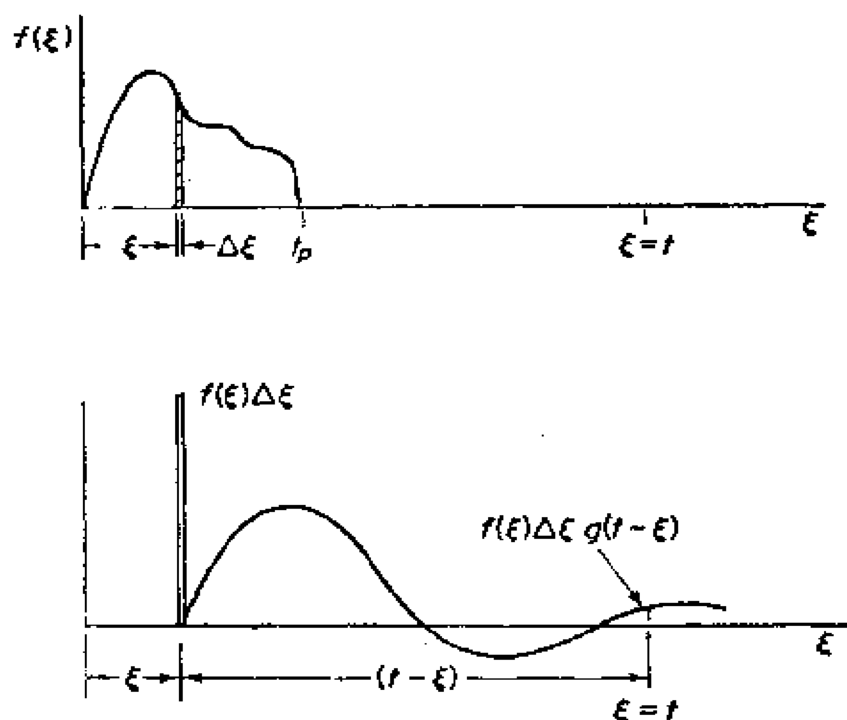


图 4.3-1

$$x(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad (4.3\text{-}2)$$

当 t 大于脉冲时间（比方说 t_p）时，一般方程（4.3-1）的上限可以代之以t_p，因为积分式可写成：

$$x=\int_0^{t_p} f(\xi)g(t-\xi)d\xi+\int_{t_p}^{t} f(\xi)g(t-\xi)d\xi$$

$$=\int_0^{t_p} f(\xi)g(t-\xi)d\xi \quad t>t_p \qquad (4.3\text{-}3)$$

在上式中，由于当$\xi>t_p$时 $f(\xi)=0$，因而第二积分为零。

基础激励 动力系统的支承经常承受由它的位移、速度或加速度给定的突然运动，因而运动方程可用相对位移 $z=x-y$ 表示：

$$\ddot{z}+2\zeta\omega_n\dot{z}+\omega_n^2z=-\ddot{y} \qquad (4.3\text{-}4)$$

而且，以后对于适用于基础激励系统的力激励系统所有结果用相对位移表示时，F_0/m项都用$-\ddot{y}$或负的基础加速度代替。

对于起始静止的无阻尼系统，相对位移的解变为：

$$z = -\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \ddot{y}(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)d\xi \qquad (4.3\text{-}5)$$

例 4.3-1

确定单自由度系统对于如图4.3-2所示的阶跃激励的响应。

解：考虑无阻尼系统，我们有：

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

把它代入方程（4.3-1），无阻尼系统的响应是：

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\xi)d\xi = \frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$

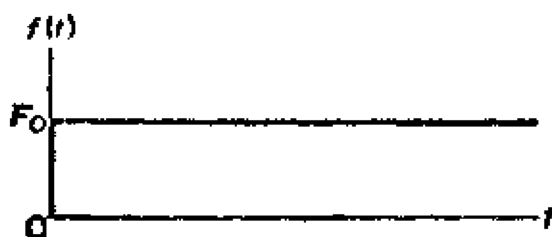


图 4.3-2 阶跃函数激励

这一结果指出，数值为F_0的阶跃力激励的尖峰响应等于静变位的两倍。

对于阻尼系统也可以用上述方法，这时给定：

$$g(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t$$

或者用另一种方法，可简单地考虑下列微分方程：

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}$$

这个方程的解由二部分组成，一是齐次方程的解，另一是方程的特解。在这种情况下的特解是$F_0/m\omega_n^2$，因此方程的全解为

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t - \phi) + \frac{F_0}{m\omega_n^2}$$

代入初始条件$x(0)=\dot{x}(0)=0$，就可得到下面的结果：

$$x=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t-\psi)\right]$$

式中

$$\tan\psi=\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

图 4.3-3 是以ζ为参量的 xk/F_0对$\omega_n t$的图解。很显然，当有阻尼时，尖峰响应小于$2F_0/k$。

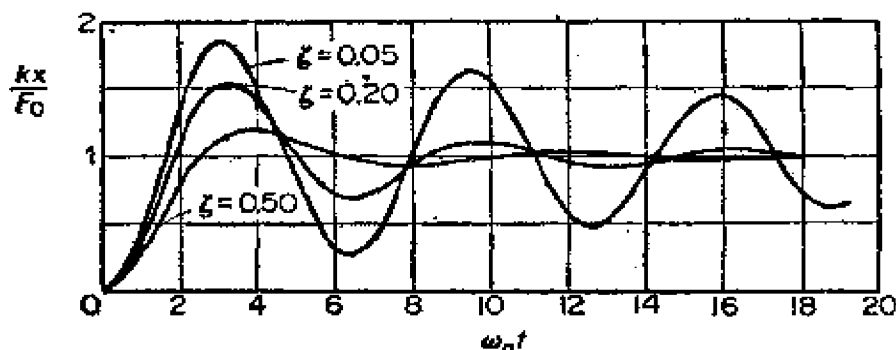


图 4.3-3 单位阶跃函数的响应

例4.3-2

考虑无阻尼的弹簧质量系统，它的基础运动是由下列形式的速度脉冲给定的：

$$\dot{y}(t)=v_0 e^{-t/t_0}$$

速度及其对时间的变化率 $a=\dot{v}$ 示于图4.3-4。

解：速度脉冲在 $t=0$时是从零突然跃到 v_0，因此它的变化率（或加速度）是无穷大。回想这样的关系：$\int a dt=v$，因此在$t=0$时的速度突然变化可以用下式满足：

$$v_0\int_0^{0^+}\delta(t)dt=v_0$$

因此，基础加速度成为：

$$\ddot{y}(t)=v_0\delta(t)-\frac{v_0}{t_0}e^{-t/t_0}$$

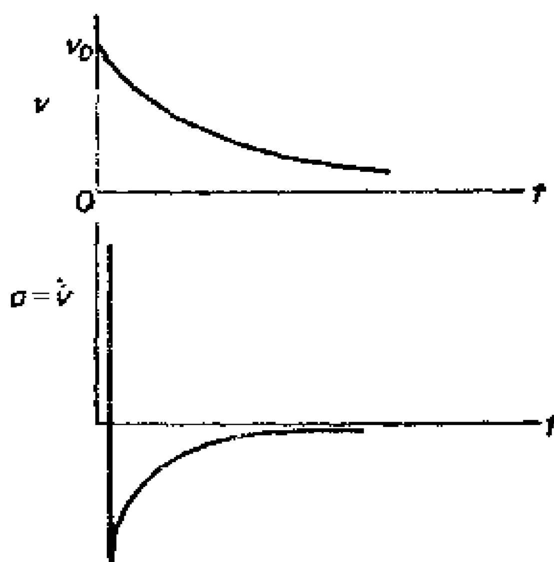


图 4.3-4

把 $\ddot{y}(t)$代入方程(4.3-5)，得：

$$z(t) = -\frac{v_0}{\omega_n}\int_0^t \left\{ \delta(\xi) - \frac{1}{t_0}e^{-\xi/t_0} \right\} \sin\omega_n(t-\xi)d\xi$$

$$= \frac{v_0 t_0}{1+(\omega_n t_0)^2} \{e^{-t/t_0} - \omega_n t_0 \sin\omega_n t - \cos\omega_n t\}$$

例4.3-3

一个悬挂在刚度为 k 的弹簧上的质量 m 承受如图 4.3-5 所示的每隔τ_i的短时间的重复脉冲 $\hat{F}$，求稳态响应。

解：每一脉冲之间，系统是在固有频率$\omega_n = \sqrt{k/m}$下自由振动。令脉冲完后的时间$t=0$，位移和速度则可表为：

$$x = A\sin(\omega_n t + \phi) \qquad (a)$$

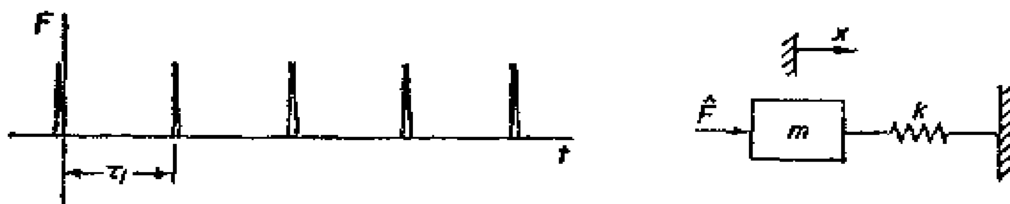


图 4.3-5　对弹簧质量系统的重复脉冲

$$\dot{x} = \omega_n A\cos(\omega_n t + \phi) \tag{b}$$

在 $t=0$ 时有：

$$x(0) = A\sin\phi \tag{c}$$

$$\dot{x}(0) = \omega_n A\cos\phi \tag{d}$$

下一脉冲前一刻的位移和速度是：

$$x(\tau_i) = A\sin(\omega_n \tau_i + \phi) \tag{e}$$

$$\dot{x}(\tau_i) = \omega_n A\cos(\omega_n \tau_i + \phi) \tag{f}$$

式中 τ_i 是脉冲间的时间间隔。作用在这时间的脉冲使速度突然增加 $\hat{F}/m$，尽管位移仍然基本上没有变化。

如果达到稳定，则每一循环后的速度和位移必定重复其本身值。因此，我们能够写成：

$$A\sin\phi = A\sin(\omega_n \tau_i + \phi) \tag{g}$$

$$\omega_n A\cos\phi = \omega_n A\cos(\omega_n \tau_i + \phi) + \frac{\hat{F}}{m} \tag{h}$$

把上列方程改写为

$$\sin(\omega_n \tau_i + \phi) - \sin\phi = 0 \tag{i}$$

$$\cos(\omega_n \tau_i + \phi) - \cos\phi = -\frac{\hat{F}}{\omega_n m A} \tag{j}$$

我们注意，这些方程可改写为：

$$\sin\frac{\omega_n \tau_i}{2}\cos\left(\frac{\omega_n \tau_i}{2} + \phi\right) = 0 \tag{i'}$$

$$\sin\frac{\omega_n \tau_i}{2}\sin\left(\frac{\omega_n \tau_i}{2} + \phi\right) = \frac{\hat{F}}{2\omega_n m A} \tag{j'}$$

因为对任意 τ_i，$\sin\frac{\omega_n \tau_i}{2}$ 不可能等于0，故只有下列条件成立公式（i'）才能满足：

$$\cos\left(\frac{\omega_n \tau_i}{2} + \phi\right) = 0$$

或

$$\sin\left(\frac{\omega_n\tau_i}{2}+\phi\right)=1$$

因此，方程（j'）变为：

$$\sin\frac{\omega_n\tau_i}{2}=\frac{\hat{F}}{2\omega_n mA} \qquad (j'')$$

从此可得到振幅：

$$A=\frac{\hat{F}}{2\omega_n m\sin\frac{\omega_n\tau_i}{2}} \qquad (k)$$

弹簧的最大力 $F_s=kA$ 是有意义的，在这种情况下，等式（k）用下式代替：

$$\frac{\tau_i F_s}{\hat{F}}=\frac{\frac{\omega_n\tau_i}{2}}{\sin\frac{\omega_n\tau_i}{2}} \qquad (l)$$

因此，振幅或弹簧力在下列点达到无穷大：

$$\frac{\omega_n\tau_i}{2}=\frac{\pi f_n}{f_i}=0,\pi,2\pi,3\pi,\ \cdots$$

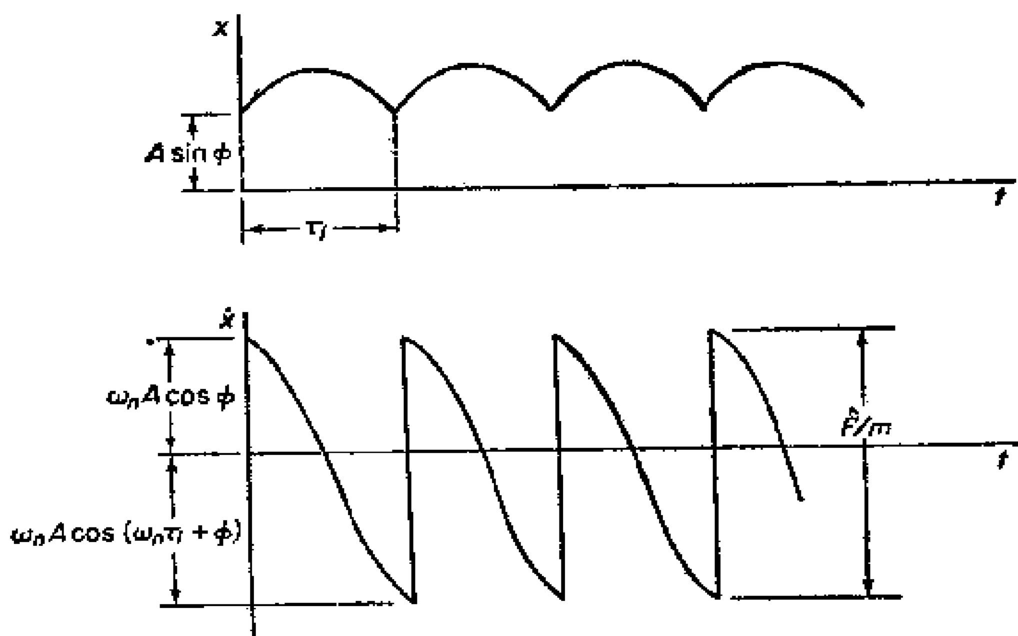


图 4.3-6 位移和速度

等式（l）也说明，在下列点最大弹簧力值最小：

$$\frac{\pi f_n}{f_i}=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \cdots$$

位移和速度对时间的变化示于图4.3-6。

有阻尼时计算步骤相同但数字计算工作量增加很多。

4.4 拉普拉斯变换式

解微分方程的拉普拉斯变换法提供了一种完全解，它既适合于瞬态振动，也适合于强迫振动。在附录中给出了拉普拉斯变换原理的简明的叙述，以供不熟悉这一方法者参考。在这一节，我们将要用一些简单的例子来说明它的应用。

例4.4-1

列出初始条件为$x(0)$和$\dot{x}(0)$的弹簧-质量粘性阻尼系统的拉普拉斯变换解的公式。

解：在任意力$F(t)$激励下的系统的运动方程是

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$

对上式取拉普拉斯变换，得：

$$m[\bar{x}(s)-x(0)s-\dot{x}(0)]+c[\bar{x}(s)+x(0)]+k\bar{x}(s)=\bar{F}(s)$$

解出$\bar{x}(s)$，我们得辅助方程：

$$\bar{x}(s)=\frac{\bar{F}(s)}{ms^2+cs+k}+\frac{(ms+c)x(0)+m\dot{x}(0)}{ms^2+cs+k}\qquad(4.4\text{-}1)$$

响应$x(t)$从公式（4.4-1）的逆变换求得；第一项表示强迫振动；第二项表示由初始条件产生的瞬态解。

对更一般的情况，辅助方程可以写成如下形式：

$$\bar{x}(s)=\frac{A(s)}{B(s)}\qquad(4.4\text{-}2)$$

式中$A(s)$、$B(s)$是多项式，而且$B(s)$的阶一般要比$A(s)$高。

如果只考虑强迫振动的解，我们得到所谓阻抗变换的定义：

$$\frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)}=z(s)=ms^2+cs+k \qquad (4.4\text{-}3)$$

它的倒数是所谓导纳变换：

$$H(s)=\frac{1}{z(s)} \qquad (4.4\text{-}4)$$

经常应用如图4.4-1的方框图来表示输入和输出。阻抗变换也可以看成是系统的传递函数，它定义为零初始条件下输出相对输入在辅助平面的比值。❶

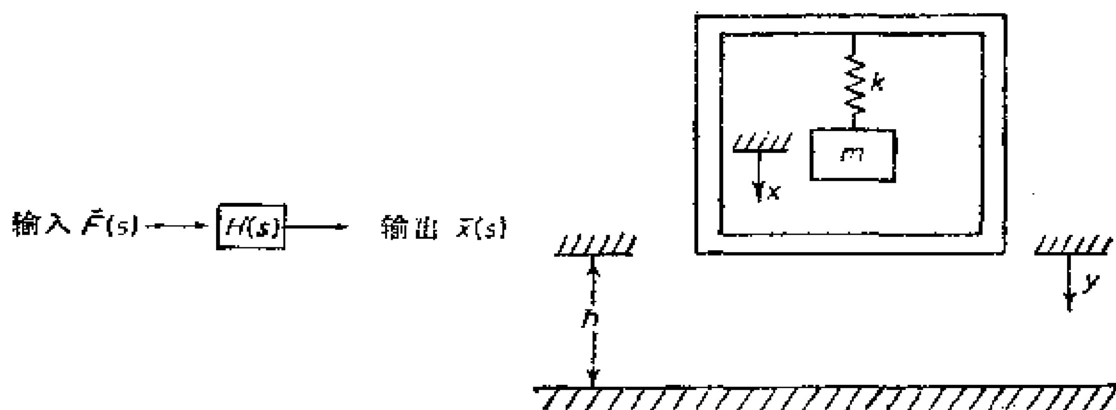


图 4.4-1　方框图　　　图 4.4-2　包装质量的跌落试验

例4.4-2

质量m装在箱子里，如图 4.4-2，箱子从高度h处跌落，要求确定传给质量的最大力和所需要的隔振空隙❷。

解：我们作下列理想化的假定：（1）质量m是用刚度为k（磅/英寸）的直线弹簧支承在箱子里；（2）箱子的质量比附在里头的质量m大，以致于箱子自由下跌不受质量m的相对运动的影响；（3）箱子冲击地板时一直保持与地板接触。

令x表示质量m相对于箱子的位移，零位选在静平衡位置，y表示箱子从开始位置计算的位移，质量m的一般运动微分方

---

❶ 即输出与输入比值的拉普拉斯变换——译注。

❷ R.D.Mindlin, "Dynamics of Package Cushioning" *Bell Syst. Tech., Jour.*, 24, (July 1954) pp 353-461.

程是：

$$m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -kx \qquad (4.4\text{-}5)$$

以$\omega_n^2 = k/m$代之，方程变为：

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x = -\ddot{y} \qquad (4.4\text{-}6)$$

对于初始条件$x(0)$，$\dot{x}(0)$，$y(0)$，$\dot{y}(0)$，上面等式的拉普拉斯变换为：

$$\bar{x}(s) = [x(0)+y(0)]\frac{s}{s^2+\omega_n^2} + [\dot{x}(0)+\dot{y}(0)]\frac{1}{s^2+\omega_n^2} - $$

$$-\frac{s^2\bar{y}(s)}{s^2+\omega_n^2} \qquad (4.4\text{-}7)$$

它的逆变换可写成：

$$x(t) = [x(0)+y(0)]\cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}[\dot{x}(0)+\dot{y}(0)]\sin\omega_n t -$$

$$-\mathscr{L}^{-1}\frac{s^2\bar{y}(s)}{s^2+\omega_n^2} \qquad (4.4\text{-}8)$$

现在我们把上式限定于此题的条件。特别重要的是，箱子着地的时间为t_0时m的位移$x(t_0)$和速度$\dot{x}(t_0)$。

自由下降阶段的初始条件是 $x(0)=y(0)=\dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0$，箱子的运动及其变换是：

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2, \quad \bar{y}(s) = \frac{g}{s^3} \qquad (4.4\text{-}9)$$

把等式（4.4-9）代入等式(4.4-8)，并代以零值初始条件，就可得到质量m在下降过程中的运动：

$$x(t) = -\mathscr{L}^{-1}\frac{g}{s(s^2+\omega_n^2)} = -\frac{g}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) \qquad (4.4\text{-}10)$$

由于通过高度h的下降时间为$t_0=\sqrt{2h/g}$，于是我们得到了两个重要的量：

$$x(t_0) = -\frac{g}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t_0)$$

$$\dot{x}(t_0) = -\frac{g}{\omega_n^2}\sin\omega_n t_0$$

这些量成为本题第二方面即箱子冲到地板后的运动的初始条件。重新规定碰撞的时间，则本题第二部分的起始条件是：

$$y(0) = 0, \qquad x(0) = -\frac{g}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t_0)$$

$$\dot{y}(0) = g t_0, \quad \dot{x}(0) = -\frac{g}{\omega_n}\sin\omega_n t_0$$

从一般的方程（4.4-8），碰撞后m的位移方程变为：

$$x(t) = -\frac{g}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)\cos\omega_n t + \left(\frac{g t_0}{\omega_n} - \frac{g}{\omega_n^2}\sin\omega_n t_0\right)\sin\omega_n t$$

$$= \frac{g}{\omega_n^2}\sqrt{(1-\cos\omega_n t_0)^2 + (\omega_n t_0 - \sin\omega_n t_0)^2}\,\sin(\omega_n t - \phi)$$

(4.4-11)

式中

$$\tan\phi = \frac{(1-\cos\omega_n t_0)}{(\omega_n t_0 - \sin\omega_n t_0)} \qquad (4.4\text{-}12)$$

于是m的最大振幅是：

$$X_1 = \frac{g}{\omega_n^2}\sqrt{(1-\cos\omega_n t_0)^2 + (\omega_n t_0 - \sin\omega_n t_0)^2} \qquad (4.4\text{-}13)$$

它出现在 $(\omega_n t_1 - \phi) = \pi/2$时。最大力便是$kX_1$。

对于任意跌落高度 h 或 跌落时间 $t_0 = \sqrt{2h/g}$，当$\omega_n \to 0$时X_1具有最大值，把$\sin\omega_n t_0$和$\cos\omega_n t_0$用它的级数表示并令$\omega_n t_0$ 趋于零，就可以看出这一点。图4.4-3表示了$h = 10$，5，1，0.15英寸时，位移响应X_1与频率 $f_n = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ 的关系。但方程（4.4-13）指出，变量$\omega_n^2 X_1/g = X_1/\delta_{st}$仅是下列参数的函数：

$$\omega_n t_0 = \omega_n\sqrt{2h/g} = \sqrt{2h/\delta_{st}} \qquad (4.4\text{-}14)$$

因此，图 4.4-3 的曲线可以画成简单的无因次曲线如图4.4-4。

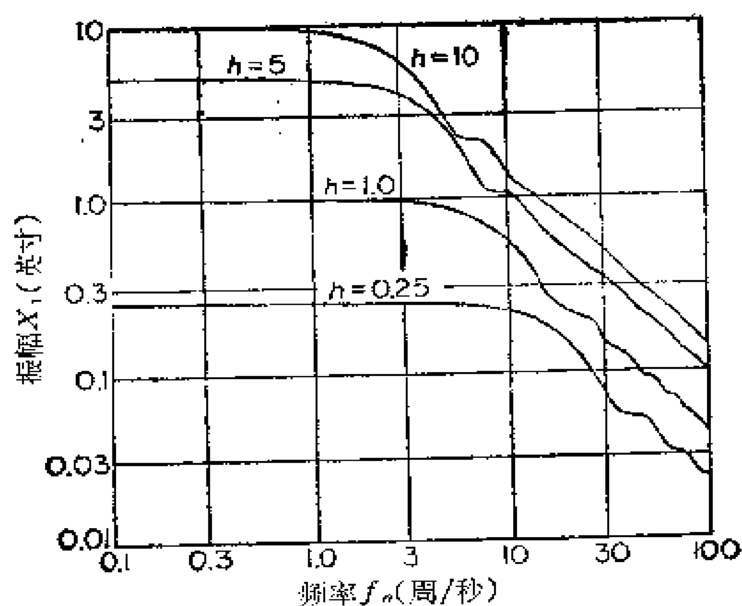


图 4.4-3 跌落试验的位移响应

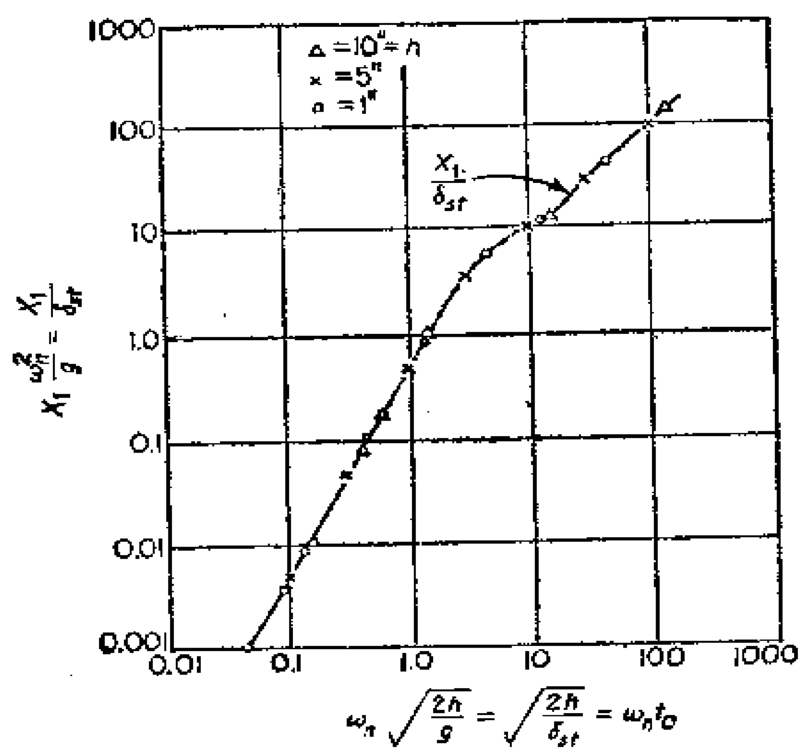


图 4.4-4 无因次位移响应

4.5 响应谱

一个脉冲表明力的突然作用或其它突变形式，它形成系统的瞬态响应。响应的最大值是对脉冲严重程度的一个好的正确的度量。当然它与系统的动力特性有关。为了区分脉冲激励的类型，我们选择单自由度无阻尼振荡器（弹簧-质量系统）作为标准的系统。

工程师们找到了在设计中有用的响应谱这个概念。响应谱是单自由度振荡器的最大尖峰响应与其固有频率间函数关系的图示。因此不同类型的脉冲激励将形成不同的响应谱。

由于响应谱是根据时间响应曲线单点值求得的，因此它本身是一种不完整的信息量子，它不是对脉冲输入的唯一定义。事实上，两种不同的脉冲激励可能具有非常类似的响应谱。尽管有此限制，响应谱还是被广泛应用的有用概念。

系统对任意激励 $f(t)$的响应，曾用等式（4.3-1）表示为脉冲响应$g(t)$的函数：

$$x(t)=\int_0^t f(\xi)g(t-\xi)d\xi \qquad (4.5\text{-}1)$$

对无阻尼单自由度振荡器，我们有：

$$g(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t \qquad (4.5\text{-}2)$$

这就是说，用于绘制响应谱的尖峰响应由下式给出

$$x(t)_{max}=\left|\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)d\xi\right|_{max} \qquad (4.5\text{-}3)$$

当脉冲是由于支承点的突然运动所引起时，在公式(4.5-3)中的$f(t)$用$-\ddot{y}(t)$（支承点的加速度）所代替，即

$$Z(t)_{max}=\left|\frac{-1}{\omega_n}\int_0^t \ddot{y}(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)d\xi\right|_{max} \qquad (4.5\text{-}4)$$

与脉冲激励 $f(t)$ 或$-\ddot{y}(t)$有关的是某些特征时间，如脉冲作用时间间隔，再利用振荡器的固有周期τ，则$x(t)$或$z(t)$的最大

值可以画成t_1/τ的函数。

图 4.5-1、4.5-2及 4.5-3表示三种不同激励的响应谱。图中的水平标尺等于比值 t_1/τ，垂直标尺是一无因次量，它表示动力加载相对于静止加载的动力效应。动力系数一般小于2。

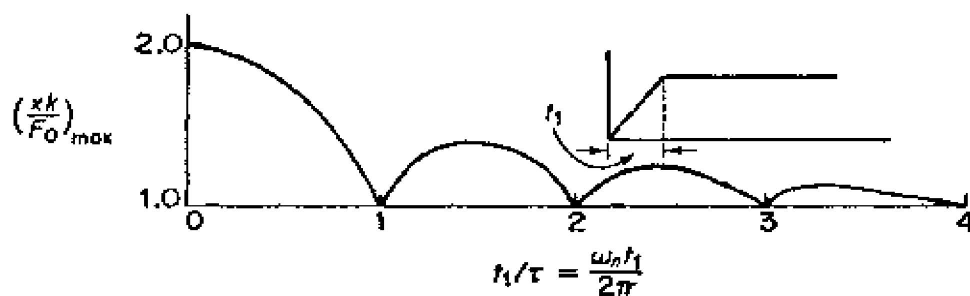


图 4.5-1

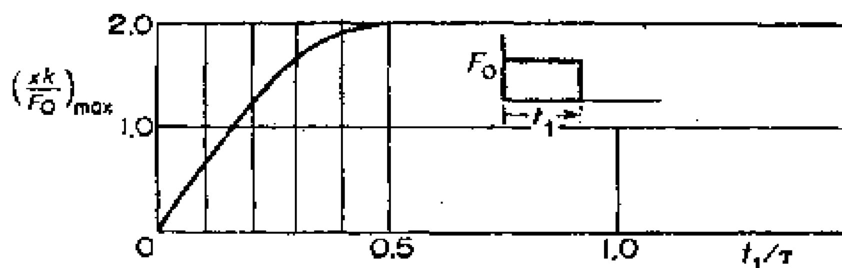


图 4.5-2

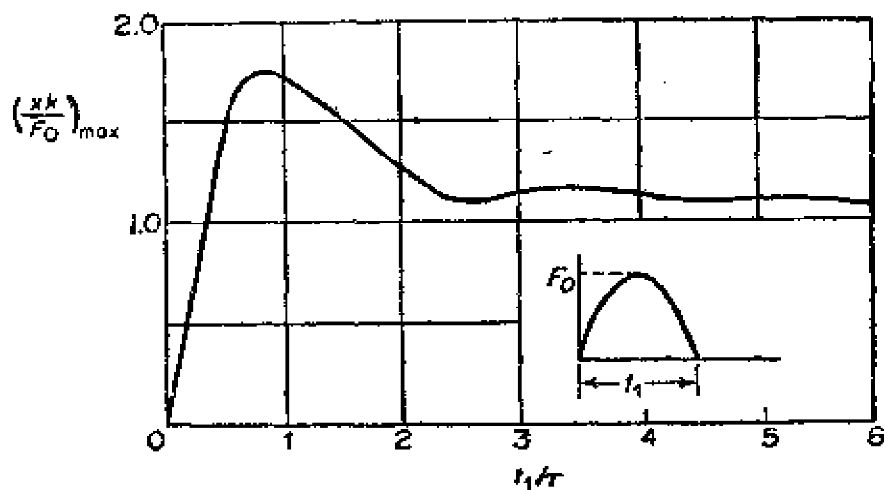


图 4.5-3

准响应谱 在地震情况下，响应谱常可方便地用速度谱来表示。位移谱和加速度谱可以用速度谱除以或乘以ω_n来表示。这样形成的谱称之为准谱，因为它们只有当尖峰响应出现在脉冲已经过去之后而且运动为谐运动时才是正确的。

速度谱被广泛地用于地震分析，而阻尼一般是包括的。用相对位移$z = x - y$，则阻尼振荡器的运动方程是：

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y} \tag{4.5-5}$$

同时等式（4.5-4）用下式代替：

$$z(t) = \frac{-1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta}}\int_0^t \ddot{y}(\xi)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\xi)} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n(t-\xi)\,d\xi \tag{4.5-6}$$

利用下列关系：

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t,\xi)d\xi = \int_0^t \frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t}d\xi + f(t,\xi) \qquad \xi = t \tag{4.5-7}$$

对（4.5-6）求导，得速度：

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) = \frac{-1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\int_0^t \ddot{y}(\xi)e^{-\zeta\omega_n(t-\xi)} \times \\ \times[-\zeta\omega_n \sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n(t-\xi) + \\ +\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n(t-\xi)]d\xi\end{aligned} \tag{4.5-8}$$

令

$$A = \int_0^t \ddot{y}(\xi)e^{\zeta\omega_n\xi}\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n\xi d\xi \tag{4.5-9}$$

$$B = \int_0^t \ddot{y}(\xi)e^{\zeta\omega_n\xi}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n\xi d\xi \tag{4.5-10}$$

于是方程（4.5-8）可写为：

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\{[A\zeta - B\sqrt{1-\zeta^2}]\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \\ +[A\sqrt{1-\zeta^2} + B\zeta]\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\}\end{aligned} \tag{4.5-11}$$

或

$$\dot{z}(t)=\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{A^2+B^2}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t-\phi)$$

(4.5-12)

如果方程（4.5-12）相对于时间画成图，将出现如图4.5-4所示的调制波。这样尖峰速度响应S_v或速度谱有足够精度地用包络线的尖峰值表示

$$S_v=|\dot{z}(t)|_{max}=\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{A^2+B^2}\right|_{max}\qquad(4.5\text{-}13)$$

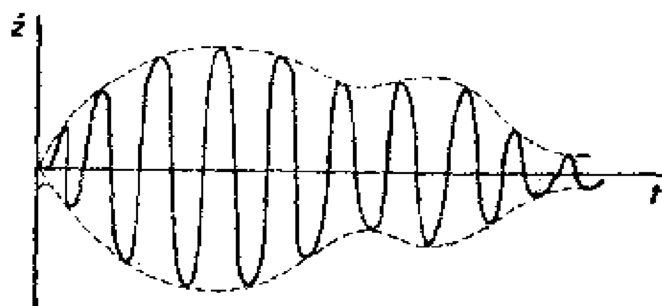


图 4.5-4

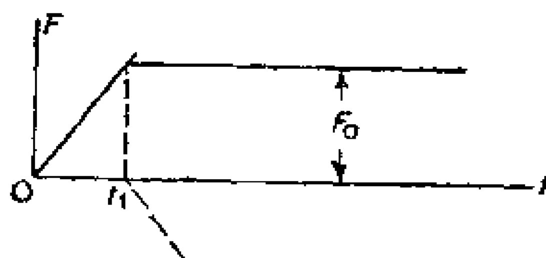


图 4.5-5

因而位移和加速度峰值的近似关系，即所谓准谱：

$$|x-y|_{max}=\frac{S_v}{\omega_n}\qquad(4.5\text{-}14)$$

$$|\ddot{z}|_{max}=\omega_n S_v\qquad(4.5\text{-}15)$$

例4.5-1

求图4.5-5所示的增长时间为t_1的阶跃函数的无阻尼响应谱。

解：输入可看作是由两个斜线函数$F_0(t/t_1)$组成，其中第二个是负的而且延后t_1。

对第一个斜线函数，其卷积积分的项是：

$$f(t)=F_0(t/t_1)$$

$$g(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t=\frac{\omega_n}{k}\sin\omega_n t$$

响应：

$$x(t)=\frac{\omega_n}{k}\int_0^t\frac{F_0\xi}{t_1}\sin\omega_n(t-\xi)d\xi$$

$$=\frac{F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right),\quad t<t_1$$

对于从 t_1 开始的第二个斜线函数产生的响应，只要观察一下上面方程就可写成：

$$x(t)=-\frac{F_0}{k}\left\{\frac{(t-t_1)}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1}\right\}$$

把这两个方程相加，$t>t_1$ 的响应变成：

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left\{1-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}+\frac{1}{\omega_n t_1}\sin\omega_n(t-t_1)\right\}\quad t>t_1$$

对上式求导并使它等于零，得峰值的时间：

$$\tan\omega_n t_p=\frac{1-\cos\omega_n t_1}{\sin\omega_n t_1}$$

因为 $\omega_n t_p$ 必须大于 π，我们亦可得：

$$\sin\omega_n t_p=-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\omega_n t_1)}$$

$$\cos\omega_n t_p=\frac{-\sin\omega_n t_1}{\sqrt{2(1-\cos\omega_n t_1)}}$$

把这些等式代入 $x(t)$，可找到尖峰振幅：

$$\left(\frac{xk}{F_0}\right)_{max}=1+\frac{1}{\omega_n t_1}\sqrt{2(1-\cos\omega_n t_1)}$$

令 $\tau=2\pi/\omega_n$ 为振荡器的周期，则上式可相对 t_1/π 画成图 4.5-1 的曲线。

例 4.5-2

求例 4.3-2 的速度 $\dot{y}(t)=v_0e^{-t/t_0}$ 为基础输入的响应谱。

解：相对位移 $z(t)$ 曾在例 4.3-2 中找到为：

$$z(t)=\frac{v_0t_0}{1+(\omega_nt_0)^2}(e^{-t/t_0}-\omega_nt_0\sin\omega_nt-\cos\omega_nt)$$

为了求得尖峰值 z_p，首先要把方程对时间 t 求导并使它等于零，然后把求得的时间回代到 $z(t)$ 方程。显然，对这个问题，它的结果是一个超越方程，必须用图解法。为了避免数字的麻烦，我们将用不同的近似法如下。

对于很刚性的系统（它相应于大的 ω_n 值），尖峰响应无疑将集中出现在很小的 t 内，因此可得方程中时间部分变量的尖峰值为：

$$(1-\omega_nt_0-1)=-\omega_nt_0$$

因此，对于大的 ω_n 值，响应的尖峰值将接近等于：

$$|z_p|\cong\frac{v_0t_0}{1+(\omega_nt_0)^2}(\omega_nt_0)\cong\frac{v_0t_0}{\omega_nt_0}$$

z_p/v_0t_0 相对 ω_nt_0 的图象是等轴双曲线。

对小值 ω_n 或很软的弹簧，输入延续时间将比系统的周期短。因此，输入有如图 4.5-6 所示的数值等于 $v_0t_0\delta'(t)$ 的双重线脉冲。因而 $z(t)$ 的解为

$$z(t)=v_0t_0\cos\omega_nt$$

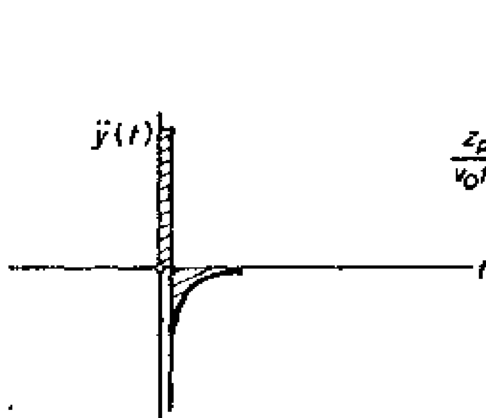


图 4.5-6 双重线脉冲

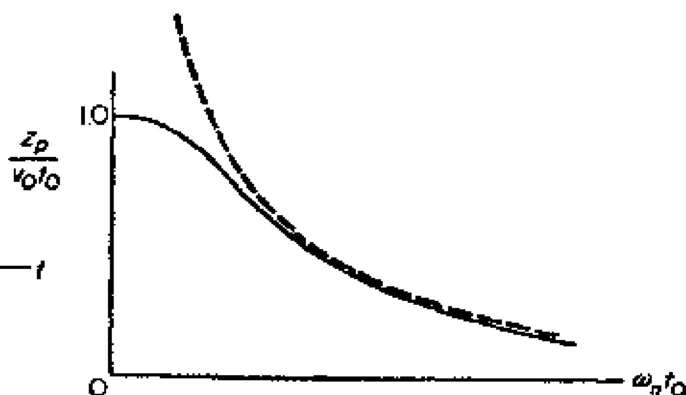


图 4.5-7 基础速度输入 $y(t)=y_0e^{-t/t_0}$ 的响应谱

它的峰值是：

$$|z_p| \cong v_0 t_0$$

用这些极限条件估算，便可画出响应谱，如图 4.5-7 所示。

4.6 模拟计算机

我们简要地接触到的瞬态问题和响应谱已足够说明，即使是很简单的问题，我们也面临了代数困难。这样的问题用模拟计算机解是很方便的，它对解常微分方程是理想的。这些计算机也能解非线性问题，对这些问题的解析方法或不存在或实际应用过于复杂。

模拟计算机的基本元件是高放大倍数的运算放大器，用符号表示在 图 4.6-1。然而不需要详细了解它的电子学原理。这种放大器的特性可用下列方程表示：

$$e_0 = -\mu e_g \tag{4.6-1}$$

式中 μ 是放大系数，e_g 是控制极电压，e_0 是输出极电压。对现代运算放大器，放大系数 μ 近似 于 10^8。由于输出电压一般限制到 ±100 伏，因此控制电压 e_g 的数量级是 $\pm10^{-6}$伏。控制极的控制电流也是很小的，典型值一般约为 10^{-7}安培。把运算放大器与不同类型的阻抗连接，就可实现微分、积分、求和等的运算。图 4.6-2表示放大器与一个输入阻抗 Z_i和一个反馈阻抗 Z_f连接的一般回路。对上述回路，可写出下列方程：

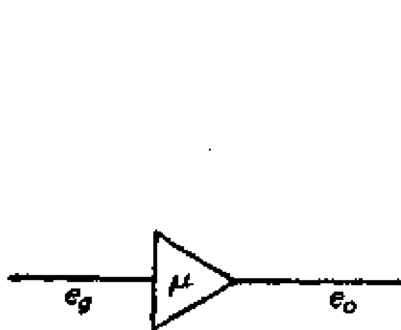


图 4.6-1　运算放大器

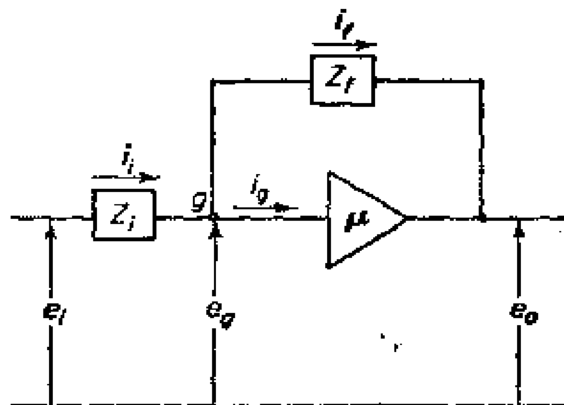


图 4.6-2　运算放大器回路

$$e_i - e_g = i_i Z_i$$
$$e_g - e_0 = i_f Z_f$$
$$i_i = i_f + i_g$$
$$e_0 = -\mu e_g$$

在这些方程中，e_g与e_0和e_i相比是可以忽略的，i_g与i_i和i_f比较是可以忽略的量。因此，以$e_g = i_g = 0$，上述方程变成：

$$e_i = i_i Z_i$$
$$-e_0 = i_f Z_f$$
$$i_i = i_f$$

从此，我们得输出输入的关系：

$$\frac{e_0}{e_i} = -\frac{Z_f}{Z_i} \qquad (4.6\text{-}2)$$

这就是模拟计算机的基本公式。

（*a*）变　号　最简单的运算是改变符号。令$Z_i = R_i$，$Z_f = R_f$，等式（4.6-2）变为：

$$e_0 = -\frac{R_f}{R_i} e_i \qquad (4.6\text{-}3)$$

如$R_f = R_i$，我们简单地得：

$$e_0 = -e_i$$

变号回路示于图4.6-3。

（*b*）求　和　如果多于1的输入接到g点，如图4.6-4所示，则i_f是输入电流之和：

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_f$$

$$\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} = -\frac{e_0}{R_f}$$

输出电压由以下和式给出：

$$e_0 = -\sum_i \frac{R_f}{R_i} e_i \qquad (4.6\text{-}4)$$

如果所有的电阻值都相等，则导致输入电压之和：

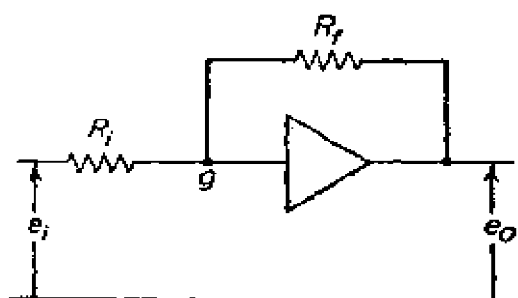


图 4.6-3　标尺系数 R_f/R_i 回路

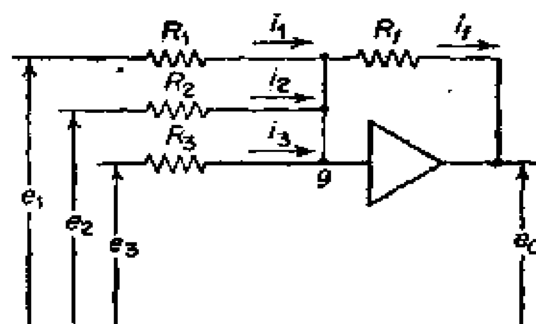


图 4.6-4　求和回路

$$e_0 = -\sum_i e_i$$

（c）积　分　如果反馈阻抗是电容C，如图4.6-5所示，则回路可执行积分职能。以一初始电压 e（0）跨接在电容器上，则电容器在任一瞬时的电压为（回想起 $e_g \cong 0$）：

$$e_0 = -\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + e(0)$$

但是 $i = e_i/R$，因此上式变为：

$$e_0 = -\frac{1}{RC}\int_0^t e_i\,dt + e(0) \qquad (4.6\text{-}5)$$

以 $R=1$兆欧，$C=1$微法，$RC=1$秒代之，计算机时间可直接用秒计算。

初始电压 e（0）用的回路按图中的虚线连接，再用开关 S 在计算前先接入。计算开始瞬时用继电器使开关 S 同时打开。

（d）微　分　在模拟计算机中要避免微分运算，因为输入的不可避免的噪音讯号被放大μ倍，因而造成放大器饱和。然而，调正方程以备积分通常是可能的。

（e）分　压　分压器常用来取得输入电压的分数 k 倍：

$$e_2 = ke_1$$

它用图4.6-6（a）的符号表示。

在分压器上这种分压比的作用只有在输出打开时才有效，而

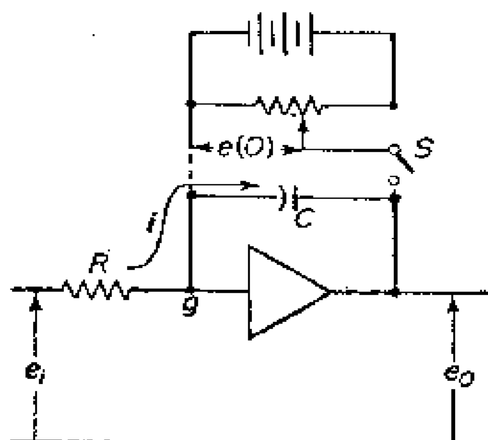


图 4.6-5 带有起始条件的积分回路

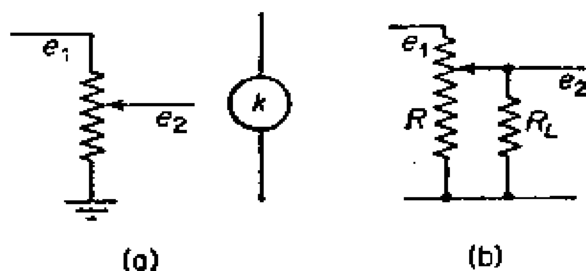


图 4.6-6 分压器

当负荷电阻跨接在输出上，如图4.6-6（b），输出电压可证明为：

$$e_2 = ke_1\left(\frac{1}{1+\dfrac{R}{R_L}k(1-k)}\right) \tag{4.6-6}$$

式中R为分压器电阻，很显然，当$R/R_L \to 0$时，e_2近似地等于ke_1。

（f）乘 法 对模拟计算机，乘是最困难的一种运算。作为一种方法，图 4.6-7 表示了一种用伺服装置与一组分压器相连的无负荷分压器原理。第一个分压器接在 ±100 伏，第二个分压器接到 $\pm e_2$，该电压将与 e_1相乘。

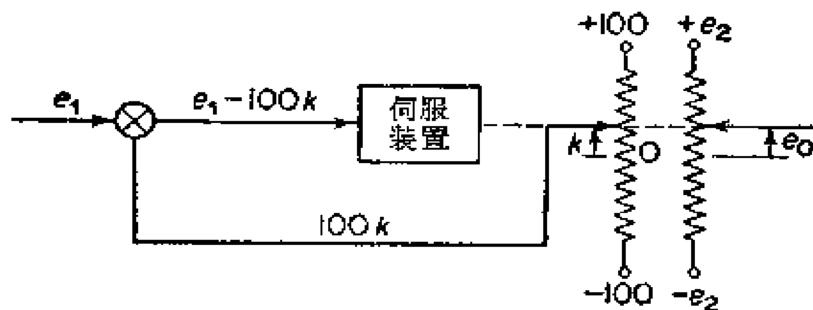


图 4.6-7 伺服乘法器

伺服装置的作用是调整这一分压器的触点，使得第一个分压

器输出和输入电压 e_1间的误差为零。由于每一个分压器的输出正比于 k，因此有：

$$e_1 = 100k, \quad e_0 = ke_2$$

消去 k，得等式：

$$e_0 = \frac{e_1 e_2}{100} \qquad (4.6\text{-}7)$$

（g）单自由度系统的计算机回路　用模拟计算机解单自由度线性系统用图 4.6-8 回路来说明。方程式表示为：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

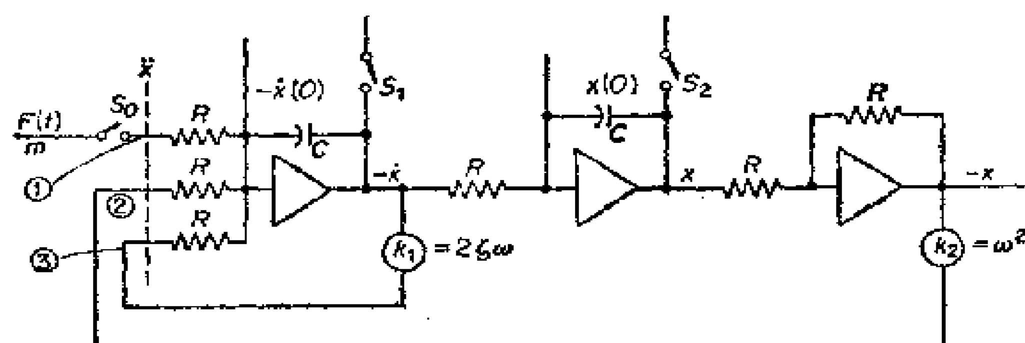


图 4.6-8　单自由度系统模拟回路

把它改写为：

$$\ddot{x} = -2\zeta\omega_n\dot{x} - \omega_n{}^2 x + \frac{1}{m}F(t)$$

假定第一个放大器输入为 $\ddot{x}$，它的输出是 $-\dot{x}$，等。在①、②、③三点的电压等于 $\ddot{x}$，它是上式方程的右面部分。注意，接入每一放大器，符号要改变，同时，分压器对 $2\zeta\omega_n$ 和 $\omega_n{}^2$进行调整。起动条件 $x(0)$和 $\dot{x}(0)$是两只电容在时间 $t=0$时的电压。当计算机进入运算时，开关 S_0接入，开关 S_1和 S_2同时打开。

（h）改变比例尺　如果对不同问题进行线性变换，系统的特性仍然不变，那么，我们只需改变（扩大或缩小）变量的比例尺。在利用计算机解题时，由于计算机能力的限制，经常需要改变比例尺。时间比例尺要改变的原因，可能是实际振动的频率对

计算机及其跟踪记录来说过高。另一方面，如果实际的振动频率过低，计算时间可能变得太长，导致漂移误差。为了使放大器使用在它的极限 ±100 伏以内，振幅比例尺也需改变。为了最大的准确性，响应的峰值应限制在 ±100 伏范围内。

假定对实际的振动，方程是：

$$\ddot{x}(t)+2\zeta\omega_n\dot{x}(t)+\omega_n{}^2x(t)=\frac{1}{m}F(t) \tag{4.6-8}$$

初始条件是$x(0)$和$\dot{x}(0)$。

如果我们要改变问题的时间比例尺α，我们令

$$\tau=\alpha t \tag{4.6-9}$$

它们间导数关系用：

$$\alpha\frac{d}{d\tau}=\frac{d}{dt},\qquad \alpha^2\frac{d^2}{d\tau^2}=\frac{d^2}{\alpha t^2} \tag{4.6-10}$$

于是本来微分方程及其初始条件改为：

$$\alpha^2\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}+2\zeta\omega_n\alpha\frac{dx(\tau)}{d\tau}+\omega_n^2x(\tau)=\frac{1}{m}F(\tau)$$

$$\frac{dx(0)}{d\tau}=\frac{1}{\alpha}\frac{dx(0)}{dt},\quad x_\tau(0)=x_t(0) \tag{4.6-11}$$

除以α^2，方程取为下面形式：

$$\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}+2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\alpha}\right)\frac{dx(\tau)}{d\tau}+\left(\frac{\omega_n}{\alpha}\right)^2x(\tau)=\frac{1}{\alpha^2}\frac{F(\tau)}{m} \tag{4.6-12}$$

这说明系统的固有频率已经从ω_n改变到$\Omega=\omega_n/\alpha$。但是阻率ζ并不改变，因为本来方程的临界阻尼$c_{cr}=2m\omega_n$，对新方程已改变为$c_{cr}=2m\Omega$。

从理论上讲，有可能用计算机解新的方程并用本来变量来说明它的结果。但是接触到关于计算回路电压数量级问题，还要引起进一步注意。这可以在以下例子中进行最好的讨论。

例4.6-1

某力学系统，受阶跃载荷$f(t)=2000$磅激励，它的方程是：

$$0.1\ddot{x}+5\dot{x}+4000x=2000\text{磅}$$

初始条件：

$$\dot{x}(0)=-20\text{英寸/秒},\quad x(0)=0.25\text{英寸}$$

改写计算机方程并提出可使用的计算回路。

解：把方程改写成如下形式：

$$\ddot{x}+50\dot{x}+40000x=20000$$

系统的固有频率：

$$\omega_n=\sqrt{k/m}=\sqrt{40000}=200\text{弧度/秒}$$

这个频率对计算机来说过高，我们任选$\alpha=100$，用时间比例尺100来降低速度。把τ作为自变量，新方程变为：

$$\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}+0.50\frac{dx(\tau)}{d\tau}+4.0x(\tau)=2.0$$

初始条件为

$$\frac{dx(0)}{d\tau}=\frac{-20}{100}=-0.20,\quad x_\tau(0)=0.25$$

我们看到，固有频率已降低到$\Omega=2$弧度/秒。

如果不考虑数量级，下面图4.6-9的回路可以满足这个方程。但是，为了计算机给出可靠的结果，放大器的输出电压不应超过±100伏，但也不能太小。根据这些理由，必须估计在修改后的

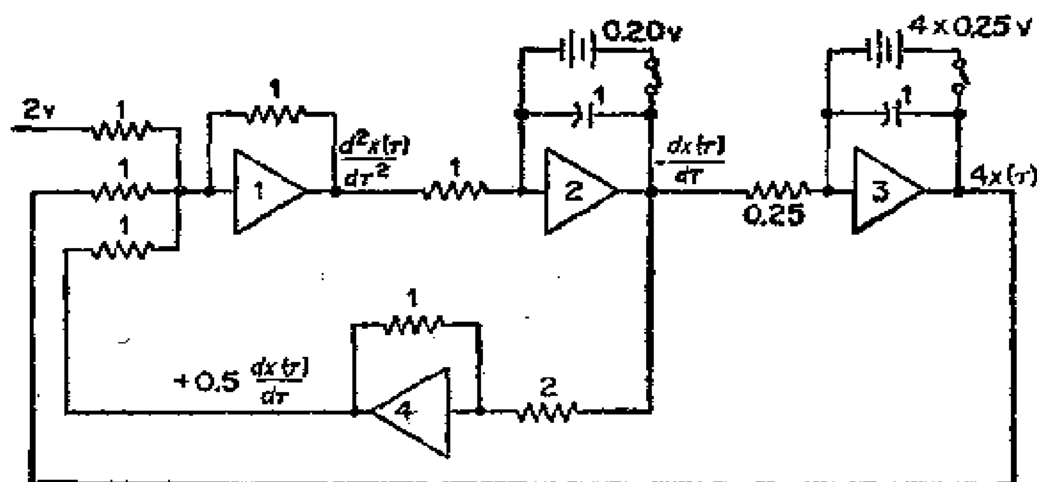


图 4.6-9 单自由度系统模拟回路

微分方程中遇到的位移、速度和加速度的峰值，提出合适的比例尺，以便使放大器的尖峰输出靠近它最大允许值 ±100 伏。

从改写的方程我们看出，阻尼将最终消除所有振动，最终的位移将达到：

$$x(\tau)_{\tau=\infty}=\frac{2.0}{4.0}=0.5\text{英寸}$$

我们同样注意到，没有阻尼，在阶跃函数激励下振幅的峰值将是上述值的两倍，或：

$$x(\tau)_{\max}=1.0\text{英寸}$$

速度和加速度的峰值可根据谐运动来估算：

$$\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)_{\max}=[\Omega x(\tau)]_{\max}=2\text{英寸/秒}$$

$$\left(\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}\right)_{\max}=[\Omega^2x(\tau)]_{\max}=4\text{ 英寸/秒}^2$$

如果再用上述最大值来考察一下图 4.6-9 的回路，则放大器1、2、3的最大输出分别是4、2、4伏。这不可能正确地从这个回路取得。

为了克服这个困难，我们这样来改变比例尺：以 $x(\tau)_{\max}=1$ 英寸，输出将非常靠近允许最大值。为了避免超出 100 伏这个极限，我们令这个电压为80伏，把改写的方程乘以20，我们得：

$$20\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}=-10\frac{dx(\tau)}{d\tau}-80x(\tau)+40$$

对于按这个比例尺的方程，可取图4.6-10的回路，其中起始电压根据放大器输出取比例尺，即以 $(dx(\tau)/d\tau)=-0.20$ 英寸/秒，则放大器 2 的输出等于 $-10(dx(\tau)/d\tau)$，它的值将是：$-10(-0.20)=2$伏。同样，放大器 3 的起始电压将是 $80\times0.25=20$伏。

现在，放大器 3 相应于所希望的最大振幅为 1 英寸时的输出是 80 伏。但是所期望的最大速度是 2 英寸/秒，放大器 2 的尖峰输出仅有 $10(dx/d\tau)=20$ 伏。因而宁愿改变放大器 2 的放大系数

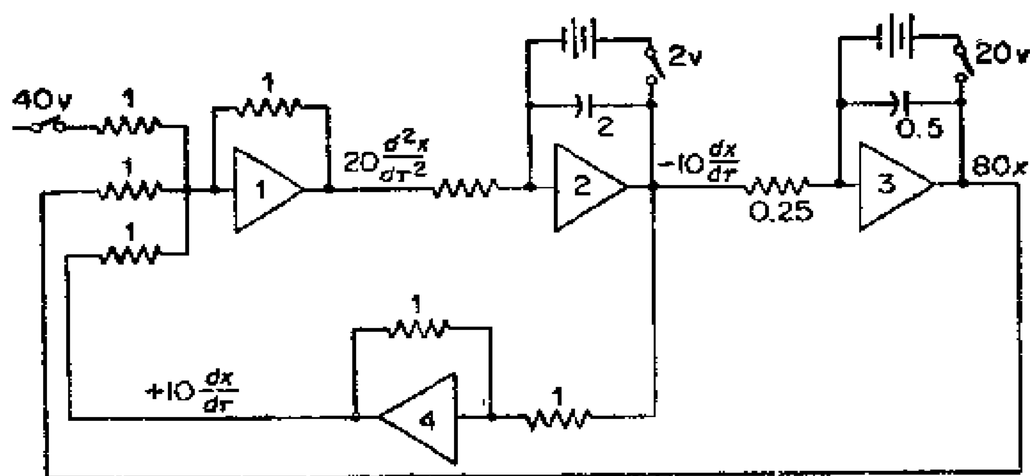


图 4.6-10

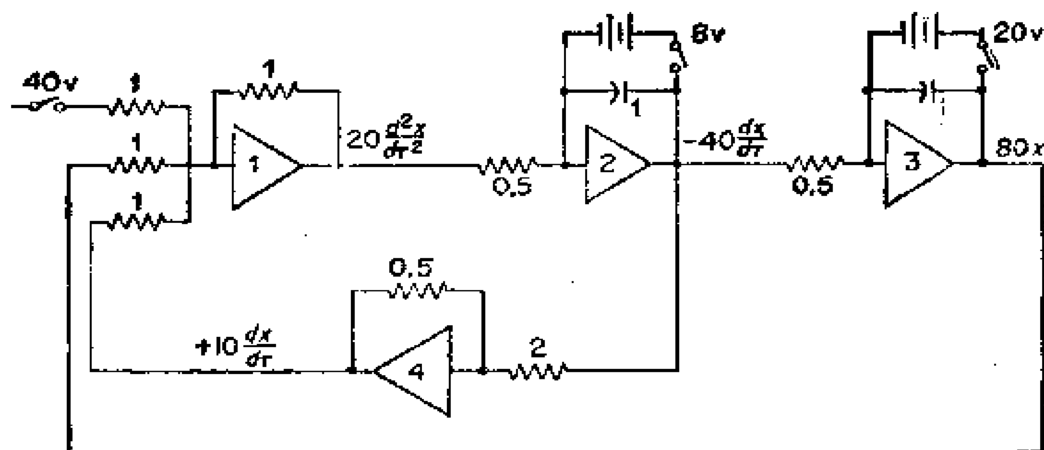


图 4.6-11

为4，同时相应地降低放大器 3 的放大系数，如图 4.6-11 所示。加速度的最大期望值是 4 英寸/秒²，因此放大器 1 的放大系数不要改变。放大器的放大倍数决定于RC值，当$R=1$兆欧，$C=1$微法时，$RC=1$。同样要注意，这些改变要求放大器 2 的起始电压从 2 伏改为 8 伏。

最后还要明白，这些计算机回路不是唯一的，相同的方程可以用不同的回路。因此，对这个问题的方程同样可用图4.6-12的

回路来解。

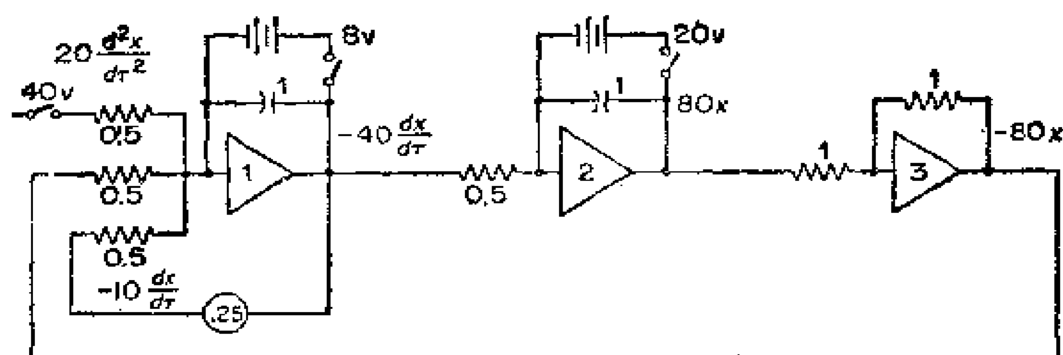


图 4.6-12

4.7 有限差分数值计算

当微分方程不能得到闭合解时，就要应用数值方法。当一弹簧-质量系统的激励力不能用简单的分析函数，或若这个力是用图解或数字表示时就属于这种情形。

数值积分的步骤是：从已知位移和速度的那个时间开始，递增地增加时间，然后解出运动微分方程。解是近似的，但减小时间间隔可使结果近似于精确解。尽管各种不同的数值方法很多，但本章只考虑两种比较简单的方法。各种方法的优点要看误差和步骤是否方便，这些在很多数值分析的教程中都已讨论过了。●*

数值解从本质上说就是要在沿时间坐标轴的基点上得到一系列未知函数的值。为此，在微分方程中的导数被近似地用泰勒级数的若干项表示。对基点i，x_{i+1}和x_{i-1}的泰勒展开式是：

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \dot{x}_i\Delta t + \ddot{x}_i\frac{\Delta t^2}{2} + \dddot{x}_i\frac{\Delta t^3}{6} + \cdots \\ x_{i-1} &= x_i - \dot{x}_i\Delta t + \ddot{x}_i\frac{\Delta t^2}{2} - \dddot{x}_i\frac{\Delta t^3}{6} + \cdots \end{aligned}\right\} i \geqslant 2 \tag{4.7-1}$$

● A. Ralston and H.S.Wilf, *Mathematical Methods for Digital Computers*, vols I & II (New York: John Wiley & Sons, 1968).

* M.G.Salvadori and M. L.Baron, *Numerical Methods in Engineering* (Prentice-Hall, Inc., 1962).

把上述二式相减并略去高阶项得：

$$\dot{x}_i \Delta t = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) \qquad i \geqslant 2 \qquad (4.7\text{-}2)$$

相加得：

$$\ddot{x}_i \Delta t^2 = x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} \qquad i \geqslant 2 \qquad (4.7\text{-}3)$$

这些递推方程与运动微分方程一起对数值解已足够。但为了开始计算过程，还必须作一些附加的考虑。

当起始的加速度（或力）不等于零时，最简单的过程是假定在第一个时间间隔中它的值不变。因为数字计算机中用 0 标号不方便，我们用 1 标记初始值。因此我们有：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \ddot{x}\Delta t \\ x_2 &= x_1 + \dot{x}_1\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}_1\Delta t^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.7\text{-}4)❶$$

在上述方程中使用的加速度 $\ddot{x}_1$ 是从运动微分方程及其初始值x_1和$\dot{x}_1$来确定的：

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m}F(t_1) - \frac{C}{m}\dot{x}_1 - \frac{k}{m}x_1$$

然后根据等式(4.7-4)求得位移x_2和速度 $\dot{x}_2$ 并把它代入 $\ddot{x}_2$ 的微分方程。然后再把x_2 和 $\ddot{x}_2$ 代入等式（4.7-3）求得 x_3，以后再重复这一过程。通常时间间隔$\Delta t \leqslant \frac{\tau}{10}$，这里 τ 是固有周期，这是足够小的，由此所得结果令人满意。

数字计算的流程图示于图4.7-1。从方框Ⓐ中给定的参数开始进到方框Ⓑ，这里是所求的微分方程。当在第一时间间隔($I=1$)到方框Ⓒ时，I不大于1，因此就引向左边方框，在这里x_2就被计算好，然后I加1，从左边循环线路又到Ⓑ和Ⓒ，这时$I=2$，于是

❶ 原书该公式的第二、三式分别误为：$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1\Delta t$ 和 $x_2 = \frac{1}{2}\ddot{x}_1\Delta t^2$。下页图4.7-1相应公式也作了修改——译注。

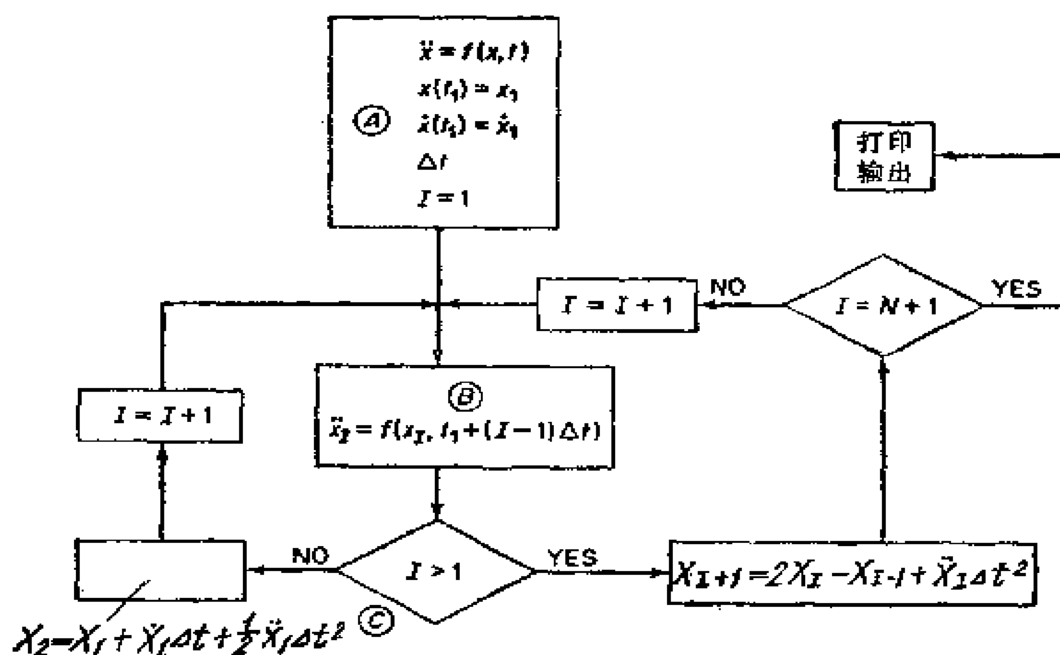


图 4.7-1

到Ⓒ后被引向右边方框去计算x_{I+1}。先假定一个Δt的间隔数N，如果棱形框中为"NO"向，则右边的循环被重复N次直至$I=N+1$，便由打印机输出。这一计算的FORTRAN程序如下。

```
                FORTRAN  PROGRAM
                       I = 1
20        ẍ = f(x_I, t_1 + (I-1)Δt)
          IF(I·GT·1)GO  TO  30
          x_2 = 1/2 ẍ_1 Δt² + ẋ_1 Δt + x_1
          I=I+1  GO  TO  20
30        x_{I+1} = 2x_I - x_{I-1} + ẍ_I Δt² [●]
          IF  (I=N+1)  GO  TO  40
          I=I+1
          GO  TO  20
40        PRINT
          STOP
          END
```

● 原书此式误为：$x_I=2x_{I-1}-x_{I-2}+\ddot{x}_{I-1}\Delta t^2$——译注。

如果起始加速度 $\ddot{x}_1 = 0$，则从等式（4.7-4）得 $x_2 = 0$，因此这个计算过程就不能开始。在这种情况下可假定在第一个时间间隔中，加速度从$\ddot{x}_1$到 $\ddot{x}_2$ 按如下所示的线性变化，于是得到如下新的方程以满足需要：

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \alpha \Delta t$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\ddot{x}_1 \Delta t^2 + \frac{1}{6}\alpha \Delta t^3$$

用第一方程的 α 代入最后一方程，得：

$$x_2 = \frac{1}{2}\ddot{x}_1 \Delta t^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}{\Delta t}\right)\Delta t^3$$

$$= \frac{1}{6}(2\ddot{x} + \ddot{x}_2)\Delta t^2 \qquad (4.7\text{-}5)$$

以 $\ddot{x}_1 = 0$，方程（4.7-5）和微分方程必须用试凑法解，即

$$x_2 = \frac{1}{6}\ddot{x}_2 \Delta t^2$$

$$\ddot{x}_2 = \phi(x_2,\ F_2) \qquad (4.7\text{-}6)$$

在4.8节要讨论龙格-库塔法，它是一种自开始方法。

例4.7-1

用数值法解微分方程：$4\ddot{x} + 2000x = F(t)$，初始条件为$x_1 = \dot{x}_1 = 0$，$F(t)$按图4.7-2给出。

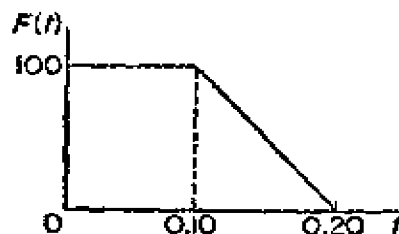


图 4.7-2

解：首先找出系统的固有周期：

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{2000}{4}} = 22.4\text{弧度/秒}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 0.281\text{秒}$$

对本题，我们用滑移法。为了保持最小的计算量，取 $\Delta t = 0.030$秒，它近似于$\tau/10$。

从微分方程得加速度为

$$\ddot{x} = \frac{1}{4}F(t) - 500x$$

以$x_1 = 0$，我们得：

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{4} \times 100 - 0 = 25$$

然后从方程（4.7-4）得：

$$x_2 = \frac{1}{2}(25)\ (0.03)^2 = 0.0113$$

用$x_2 = 0.0113$反代入微分方程求出$\ddot{x}_2$：

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{4}(100) - 500(0.0113)$$

$$= 25 - 5.65 = 19.35$$

现在以x_2及$\ddot{x}_2$代入等式（4.7-3），$i = 2$，得：

$$19.35(0.030)^2 = 0 - 2(0.0113) + x_3$$

$$x_3 = 0.0400$$

现在有了x_2和x_3，$\ddot{x}_3$可从微分方程计算。然后由等式(4.7-3)给出x_4，按着重复微分方程和等式（4.7-3）之间的过程。下表列出计算的结果，并在4.7-3画出了它的曲线。

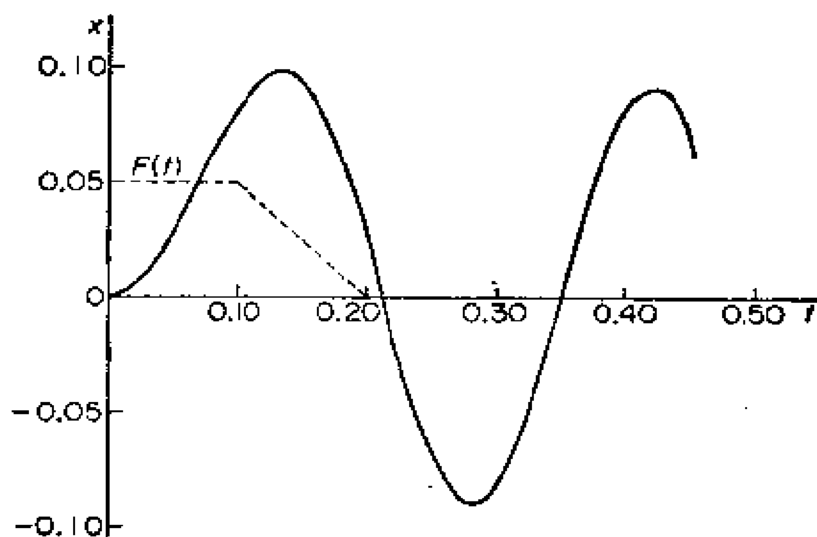


图 4.7-3

i	t	$\frac{1}{4}F(t)$	$500x$	$\ddot{x}$	$\ddot{x}\Delta t^2$	x
1	0	25.0	0	25	0.0225	0
2	0.03	25.0	5.65	19.35	.0174	.0133*
3	0.06	25.0	20.00	5.00	.0045	.0400⁺
4	0.09	25.0	35.60	− 11.60	− .0104	.0732
5	0.120	20.0	48.0	− 28.0	− .0252	.0960
6	0.150	12.5	46.80	− 34.3	− .0309	.0936
7	0.180	5.0	30.15	− 25.15	− .0226	.0603
8	0.210	0	2.20	− 2.20	.0020	.0044
9	0.240	0	− 26.75	26.75	.0241	− .0535
10	0.270	0	− 43.75	43.65	.0393	− .0873
11	0.300	0	− 40.90	40.90	.0368	− .0818
12	0.330	0	− 19.75	19.75	.0178	− .0395
13	0.360	0	10.30	− 10.30	− .0093	.0206
14	0.390	0	35.70	− 35.70	− .0321	.0714
15	0.420	0	45.05	− 45.05	− .0405	.0901
16	0.450	0				.0683

*从公式（4.7-4）：$x_2=\frac{1}{2}\ddot{x}_1\Delta t^2=\frac{1}{2}(0.0225)=0.0133$

⁺从公式（4.7-3）：$x_3=-x_1+2x_2+\ddot{x}_2\Delta t^2=-0+2(0.0133)+0.0174=0.040$

例4.7-2

用数字计算机解弹簧-质量系统对三角形脉冲激励的问题。微分方程和初始条件如下：

$$0.5\ddot{x}+8\pi^2x=F(t)$$

$$x_1=\dot{x}=0$$

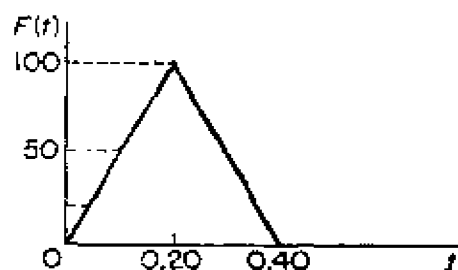


图 4.7-4

三角形力表示在图4.7-4。

解：系统的固有周期

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4\pi}=0.50$$

时间增量选择为$\Delta t=0.05$，微分方程改写为：

$$\ddot{x}=2F(t)-16\pi^2x$$

这一方程与下列递归方程（等式4.7-3）一起解：

$$x_{i+1}=\ddot{x}_i\Delta t^2-x_{i-1}+2x_i$$

因为在$t=0$时，力和加速度均为零，因此计算过程开始要用

等式（4.7-6），即：

$$x_2=\frac{1}{6}\ddot{x}_2(0.05)^2=0.000417\ddot{x}_2$$

$$\ddot{x}_2=2F(0.05)-16\pi^2x_2=50-158x_2$$

联立解之得：

$$x_2=\frac{(0.05)^2F(0.05)}{3+8\pi^2(0.05)^2}=0.0195$$

$$\ddot{x}_2=46.91$$

以下的计算过程表示在图4.7-5。取 $\Delta t=0.05$ 对力的时间区间要分为三个区域：$I=1\sim5$；$I=6\sim9$；$I>9$。指数 I 控制着流程图的指向。

Fortran程序可用很多方法写，其中之一表示在图4.7-6，它的结果列入图 4.7-7，它同样可由计算机画成图，如图 4.7-8。Δt越小图的曲线就越光滑。

响应x与t的关系曲线指明，最大值 $x\simeq1.97$ 英寸。因为 $k=8\pi^2=79$，$F_0=100$，因此习题4.23的响应谱的最大值及其相应的点是：

$$\left(\frac{xk}{F_0}\right)_{max}=\frac{1.97\times79}{100}=1.54$$

$$\frac{t_1}{\tau}=\frac{0.4}{0.5}=0.80$$

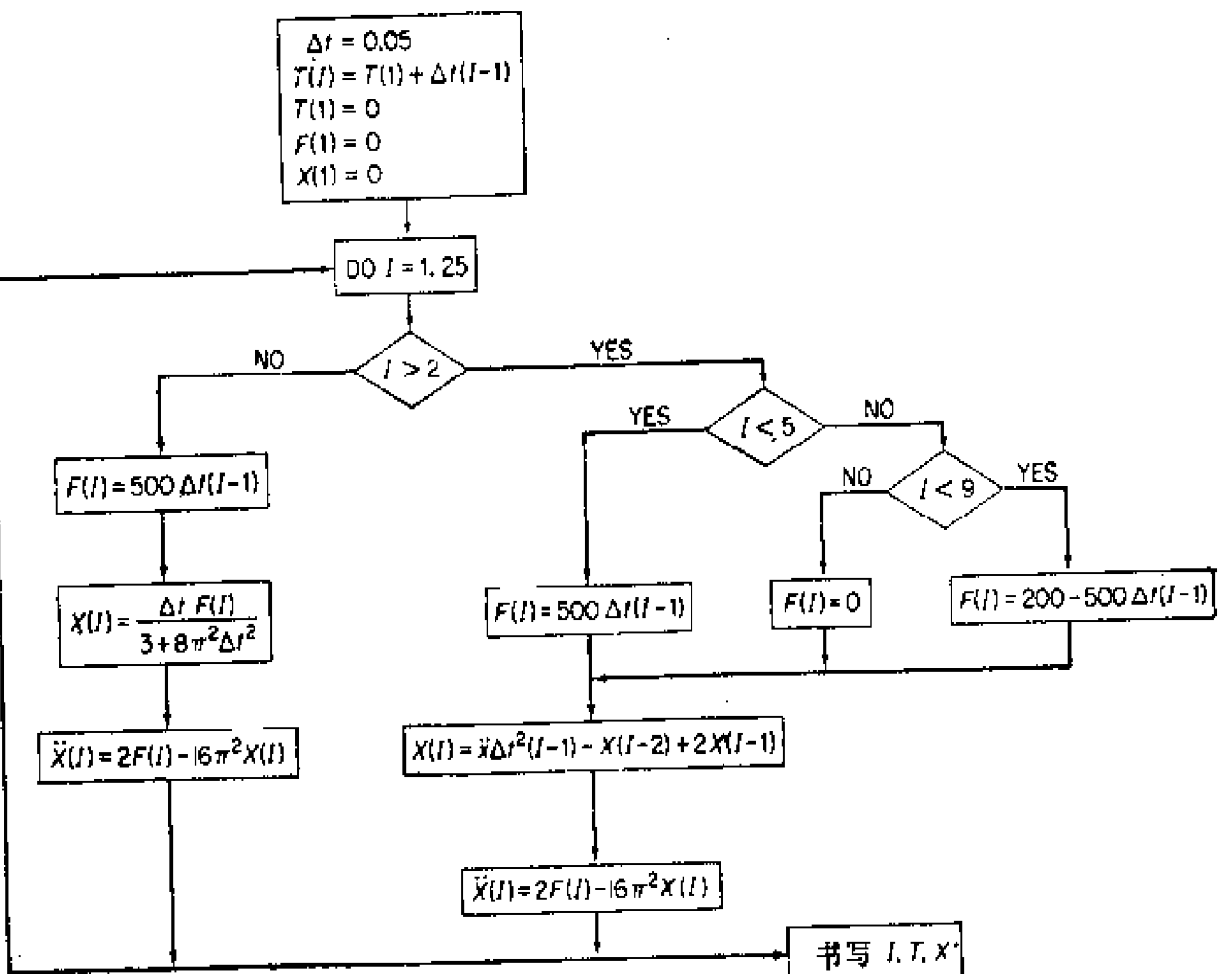
4.8 龙格-库塔计算法

龙格-库塔计算法非常流行，因为它是一个自开始方法，而且结果有很好的精度。这里简要地讨论一下它的基本原理。

考虑单自由度系统的微分方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

令 $y=dx/dt$，上面方程可写为



Δt = 0.05
T(I) = T(1) + Δt(I-1)
T(1) = 0
F(1) = 0
X(1) = 0
DO I = 1, 25
I > 2
NO
YES
F(I) = 500 Δt(I-1)
X(I) = Δt F(I) / 3+8π²Δt²
Ẍ(I) = 2F(I) - 16π²X(I)
I < 5
YES
NO
I < 9
NO
YES
F(I) = 500 Δt(I-1)
F(I) = 0
F(I) = 200 - 500 Δt(I-1)
X(I) = ẍΔt²(I-1) - X(I-2) + 2X(I-1)
Ẍ(I) = 2F(I) - 16π²X(I)
书写 I, T, X

图 4.7-5

```
                C
                C     VIBRATION PROBLEM
                C
ISN 0002              DIMENSION X(25),DX2(25),F(25),T(25),J(25),VAR(25)
ISN 0003              PI2=3.1415**2
ISN 0004              DT=0.05
ISN 0005              DT2=DT**2
ISN 0006              X(1)=0.0
ISN 0007              DX2(1)=0.0
ISN 0008              F(1)=0.0
ISN 0009              T(1)=0.0
ISN 0010              J(1)=1
ISN 0011              DO 1 I=2,25
ISN 0012              J(I)=I
ISN 0013              T(I)=DT*(I-1)
ISN 0014              IF (I .GT. 2) GO TO 2
ISN 0016              F(I)=500*DT*(I-1)
ISN 0017              X(I)=(DT2*F(1) )/(3+8*PI2*DT2)
ISN 0018              DX2(I)=2*F(I)-16*PI2**X(I)
ISN 0019              GO TO 1
ISN 0020            2 IF(I .LE. 5) F(I)=500*DT*(I-1)
ISN 0022              IF (I .GT. 5 .AND. I .LT. 9) F(I)=200-500*DT*(I-1)
ISN 0024              IF (I .GT. 9) F(I)=0.0
ISN 0026              X(I)=DX2(I-1)*DT2-X(I-2)+2*X(I-1)
ISN 0027              DX2(I)=2*F(I)-16*PI2*X(I)
ISN 0028            1 CONTINUE
ISN 0029              WRITE(6,3)
ISN 0030            3 FORMAT(41H1    J    TIME     DISPL     ACCLRTN     FORCE)
ISN 0031              WRITE(6,4) (J(I),T(I),X(I),DX2(I),F(I),I=1,25)
ISN 0032            4 FORMAT(3X,I2,2X,F6.4,3X,F6.3,3X,F7.2,4X,F7.2)
                C
                C     PLOTTING
                C
ISN 0033              DO 5 I=1,25
ISN 0034            5 VAR(I)=X(I)*10
ISN 0035              CALL PLOT1(VAR,25)
ISN 0036              STOP
ISN 0037              END
```

图 4.7-6

$$\frac{dy}{dt}=f(t,\ x,\ y) \tag{4.8-1}$$

在x_i、y_i的邻域的 x 和 y 可以表示为泰勒级数。令时间增量 $h=\Delta t$，则：

$$x=x_i+\left(\frac{dx}{dt}\right)_i h+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_i \frac{h^2}{2}+\cdots$$

$$y=y_i+\left(\frac{dy}{dt}\right)_i h+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_i \frac{h^2}{2}+\cdots$$

如果能用平均斜率代替一阶导数并略去高阶导数，则上式可用下式代替：

J	TIME	DISPL	ACCLRTN	FORCE
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0500	0.020	46.91	25.00
3	0.1000	0.156	75.31	50.00
4	0.1500	0.481	73.97	75.00
5	0.2000	0.992	43.44	100.00
6	0.2500	1.610	-104.25	75.00
7	0.3000	1.968	-210.78	50.00
8	0.3500	1.799	-234.10	25.00
9	0.4000	1.045	-165.01	0.00
10	0.4500	-0.122	19.22	0.0
11	0.5000	-1.240	195.86	0.0
12	0.5500	-1.869	295.19	0.0
13	0.6000	-1.760	277.98	0.0
14	0.6500	-0.957	151.04	0.0
15	0.7000	0.225	-35.52	0.0
16	0.7500	1.318	-208.06	0.0
17	0.8000	1.890	-298.47	0.0
18	0.8500	1.717	-271.05	0.0
19	0.9000	0.865	-136.64	0.0
20	0.9500	-0.328	51.72	0.0
21	1.0000	-1.391	219.66	0.0
22	1.0500	-1.906	300.89	0.0
23	1.1000	-1.668	263.33	0.0
24	1.1500	-0.772	121.83	0.0
25	1.2000	0.429	-67.77	0.0

图 4.7-7

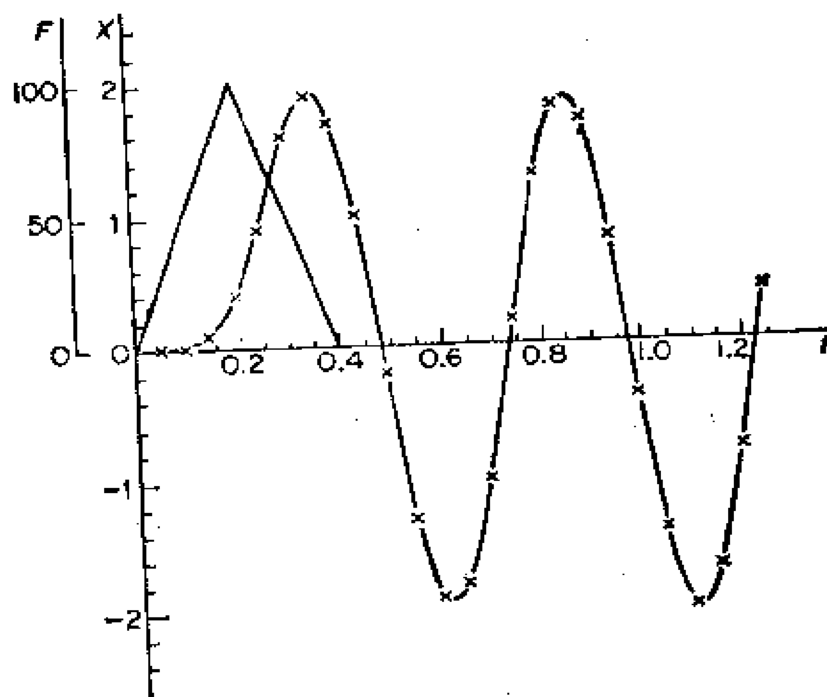


图 4.7-8

$$x = x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{iav} h \qquad (4.8\text{-}2)$$

$$y = y_i + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{iav} h \qquad (4.8\text{-}3)$$

利用辛普生法，间隔为h的平均斜率变成为：

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{iav} = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_i} + 4\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_i+\frac{h}{2}} + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_i+h}\right] \qquad (4.8\text{-}4)$$

龙格-库塔法非常相似上述计算法，但等式（4.8-4）的中心项分为2项而t、x、y、f四个值对每一点i进行计算如下：

t	x	$y=\dot{x}$	$f=\dot{y}=\ddot{x}$
$T_1=t_i$	$X_1=x_i$	$Y_1=y_i$	$F_1=f(T_1,X_1,Y_1)$
$T_2=t_i+\frac{h}{2}$	$X_2=x_i+Y_1\frac{h}{2}$	$Y_2=y_i+F_1\frac{h}{2}$	$F_2=f(T_2,X_2,Y_2)$
$T_3=t_i+\frac{h}{2}$	$X_3=x_i+Y_2\frac{h}{2}$	$Y_3=y_i+F_2\frac{h}{2}$	$F_3=f(T_3,X_3,Y_3)$
$T_4=t_i+h$	$X_4=x_i+Y_3h$	$Y_4=y_i+F_3h$	$F_4=f(T_4,X_4,Y_4)$

然后把上述量代入下面的递推公式

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + Y_4) \qquad (4.8\text{-}5)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4) \qquad (4.8\text{-}6)$$

我们回想起此式中Y的4个值被6除表示平均斜率dx/dt，四个F值被6除表示dy/dt的平均值，参见等式（4.8-2）和(4.8-3)。

习　　题

4-1　证明弹簧-质量系统在脉冲激励下尖峰响应出现的时间t_p由下式求得：

$$\tan\sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_n t_P = \sqrt{1-\zeta^2}/\zeta$$

4-2　求弹簧-质量系统在脉冲激励下的尖峰位移，证明它可以用下列形式表示：

$$\frac{x_{\mathrm{peak}}\sqrt{km}}{\hat{F}} = \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

并把它画成与 ζ 的函数关系。

4-3　证明阻尼弹簧-质量系统在阶跃力 F_0 激励下尖峰响应相应的时间 t_p 存在关系：$\omega_n t_p = \pi/\sqrt{1-\zeta^2}$。

4-4　证明题4-3系统的尖峰响应等于

$$\left(\frac{xk}{F_0}\right)_{\max} = 1 + \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

4-5　一个高 F_0、长 t_0 的矩形脉冲加到无阻尼弹簧-质量系统。把这个矩形脉冲看作是由两个阶跃脉冲组成，如图P.4-5。用阻尼解的叠加原理求 $t>t_0$ 的响应。



图 P.4-5

4-6　如果一任意力 $f(t)$ 施加到一无阻尼振荡器，它具有非零值的初始条件，证明它的解必定是如下形式：

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)d\xi$$

4-7　证明单位阶跃函数的响应 $h(t)$ 与脉冲响应 $g(t)$ 有如下关系：$g(t) = \dot{h}(t)$。

4-8　证明卷积积分同样可以与 $h(t)$ 成如下的函数关系：

$$x(t) = f(0)h(t) + \int_0^t f(\xi)h(t-\xi)\,d\xi$$

式中　$h(t)$ 是单位阶跃函数的响应。

4-9　在4.4节中给出了粘性阻尼弹簧-质量系统的辅助方程（4.4-1）。用逆变换法估算由初始条件决定的第二项值。

4-10　一个无阻尼弹簧-质量系统被一底坐激励 $\dot{y}(t) = 20(1-5t)$ 作用。如

果系统的固有频率是$\omega_n = 10$秒$^{-1}$，求最大相对位移。

4-11 一个正弦脉冲由两个正弦波叠加而成，如图P.4-11所示。

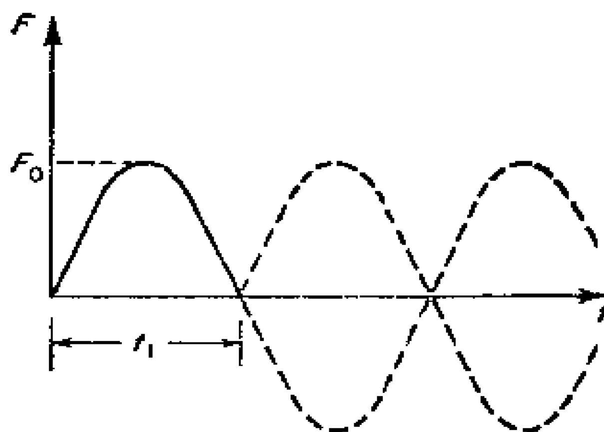


图 P.4-11

证明它的解是：

$$\left(\frac{xk}{F_0}\right) = \frac{1}{(\tau/2t_1 - 2t_1/\tau)}\left(\sin\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2t_1}{\tau}\sin\frac{\pi t}{t_1}\right)$$

$t < t_1$时

$$\left(\frac{xk}{F_0}\right) = \frac{1}{(\tau/2t_1 - 2t_1/\tau)}\left[\left(\sin\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2t_1}{t}\sin\frac{\pi t}{t_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sin 2\pi\frac{t-t_1}{\tau} - \frac{2t_1}{\tau}\sin\frac{t-t_1}{t_1}\right)\right]$$

$t > t_1$时

式中　$\tau = 2\pi/\omega$。

4-12 对图P.4-12所示的三角形脉冲，证明响应是：

$$x = \frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\tau}{2\pi t_1}\sin 2\pi\frac{t}{\tau}\right), \quad 0 < t < \frac{1}{2}t_1$$

$$x = \frac{2F_0}{k}\left\{1 - \frac{t}{t_1} + \frac{\tau}{2\pi t_1}\left[2\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{1}{2}t_1\right) - \sin 2\pi\frac{t}{\tau}\right]\right\},$$

$$\frac{1}{2}t_1 < t < t_1$$

$$x = \frac{2F_0}{k}\left\{\frac{\tau}{2\pi t_1}\left[2\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{1}{2}t_1\right) - \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - t_1) - \sin 2\pi \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{t}{\tau}\right]\right\}, t > t_1$$

4-13 一个弹簧-质量系统从一光滑的倾斜角为 30° 的斜面下滑，如图 P.4-13，求弹簧从开始接触到脱开接触的时间。

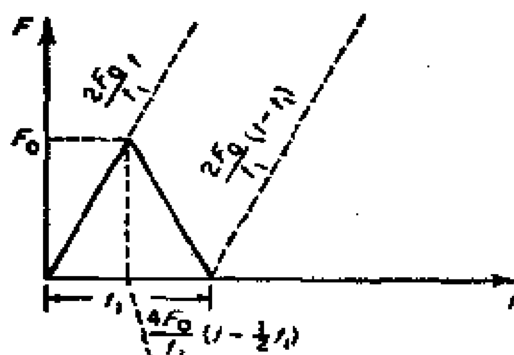


图 P.4-12

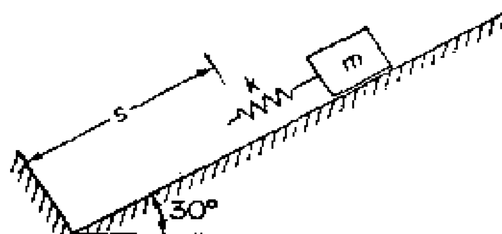


图 P.4-13

4-14 参考例 4.4-2，如果支承系统的固有频率为 10 周/秒，箱子是从高 1 英寸处下跌，求所需的隔振空间。

4-15 一38.6 磅的重物支承在一组联合刚度为6.40磅/英寸的弹簧上。假定系统被如此提升：弹簧底部正好自由而释放，求m 的最大位移以及最大压缩的时间。

4-16 一个精密的仪器用弹簧支承在箱子里，如图P.4-16，它的固有频率是10周/秒，仪器和箱子的间隙是 1.0 英寸。如果箱子意外地从高20英寸处下跌，仪器是否会碰到箱壁？

4-17 图P.4-17 所示的弹簧-质量系统存在库仑阻尼，它的作用就是一不变的摩擦力f。对底座激励，证明解是：

$$\frac{\omega_n z}{v_0}=\frac{1}{\omega_n t_1}\left(1+\frac{f t_1}{m v_0}\right)(1-\cos\omega_n t)-\sin\omega t$$

这里底座速度按题4-26的假定。

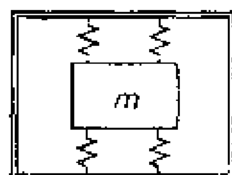


图 P.4-16

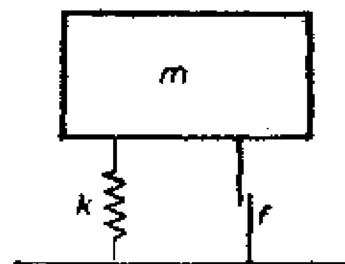


图 P.4-17

4-18 证明习题4-17的尖峰响应是：

$$\frac{\omega_n z_{max}}{v_0}=$$

$$\frac{1}{\omega_n t_1}\left(1+\frac{ft_1}{mv_0}\right)\left\{1-\frac{\frac{1}{\omega_n t_1}\left(1+\frac{ft_1}{mv_0}\right)}{\sqrt{1+\left[\frac{1}{\omega_n t_1}\left(1+\frac{ft_1}{mv_0}\right)\right]^2}}\right\}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{1}{\omega_n t_1}\left(1+\frac{ft_1}{mv_0}\right)\right]^2}}$$

用$\omega_n t_1$除之得$z_{max}/v_0 t_1$，它可以画成以ft_1/mv_0为参量的与$\omega_n t_1$为函数关系的曲线。

4-19 在习题4-18中，传给m的最大力是：

$$F_{max}=f+|kz_{max}|$$

为了把这个量画成无因次的形式，把上式乘以t_1/mv_0，得：

$$\frac{F_{max}t_1}{mv_0}=\frac{ft_1}{mv_0}+(\omega_n t_1)^2\left(\frac{z_{max}}{v_0 t_1}\right)$$

它又可以画成以ft_1/mv_0为参量的与$\omega_n t_1$为函数的关系曲线。请画出$ft_1/mv_0=0, 0.20, 1.0$的$|\omega_n z_{max}/v_0|$及$|z_{max}/v_0 t|$与$\omega_n t$的关系曲线。

4-20 证明作用时间为t_0的矩形脉冲的响应谱由下式给出并表示在图P.4-20

$$\left(\frac{xk}{F_0}\right)_{max}=2\sin\frac{\pi t_0}{\tau},\qquad \frac{t_0}{\tau}<0.50$$

$$=2\qquad\qquad \frac{t_0}{\tau}>0.50$$

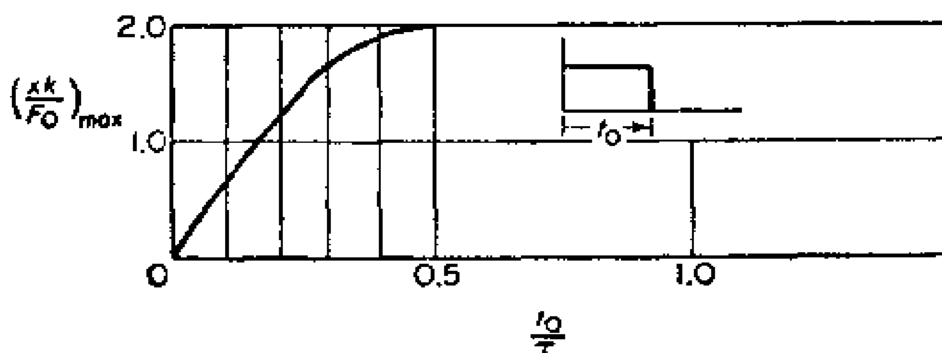


图 P.4-20

4-21 证明图P.4-21表示的是正弦脉冲的响应谱，证明对于小值 t_1/τ，尖峰响应出现在$t>t_1$的区域；证明，当 $t_1/\tau=1/2$ 时尖峰响应出现在 $t=t_1$时。

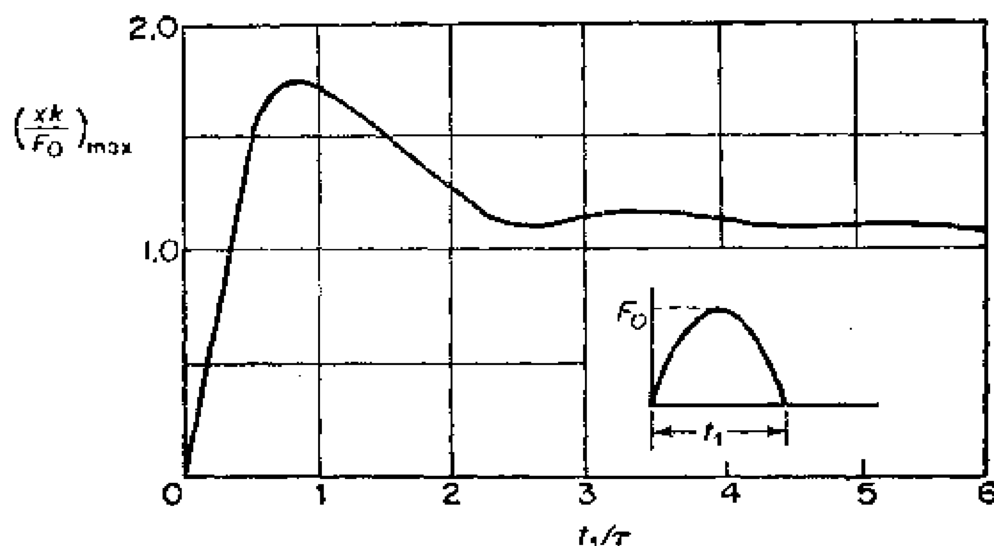


图 P.4-21

4-22 一无阻尼弹簧-质量系统具有$w=16.1$磅，固有周期为 0.5秒。它承受20磅·英寸的脉冲，形状为三角形，时间间隔为0.40秒，求质量的最大位移。

4-23 对时间间隔为t_1的三角形脉冲，证明当$t_1/\tau=\frac{1}{2}$时，尖峰响应出现在$t=t_1$，它可以从下列方程得到：

$$2\cos\frac{2\pi t_1}{\tau}\left(\frac{t_p}{t_1}-0.5\right)-\cos2\pi\frac{t_1}{\tau}\left(\frac{t_p}{t_1}-1\right)-\cos\frac{2\pi t_1}{\tau}\times$$

$$\times\frac{t_p}{t_1}=0$$

上式是根据对$t>t_1$的位移方程求导得到的。三角形脉冲的响应谱表示在图P.4-23。

4-24 如果振荡器的固有周期比脉冲的延续时间长，则最大尖峰响应将出现在$t>t_1$的区域。对阻尼振荡器，下列积分：

$$x=\frac{\omega_n}{k}\left\{\sin\omega_n t\int_0^t f(\xi)\cos\omega_n\xi d\xi-\cos\omega_n t\int_0^t f(\xi)\sin\omega_n\xi d\xi\right\}$$

对$t>t_1$将是不变的，因为在这一区域中$f(t)=0$。

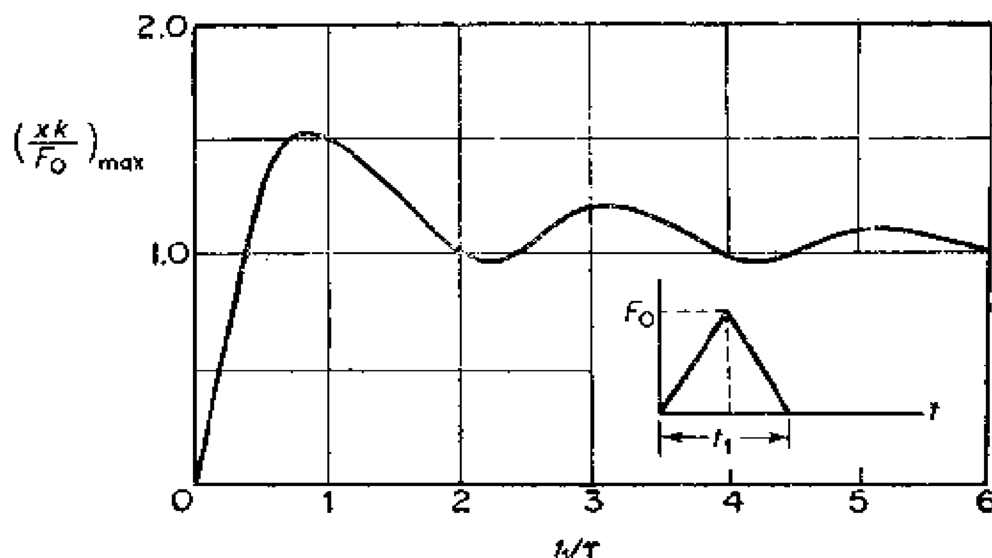


图 P.4-23

因此用下列替换：

$$A\cos\phi=\omega_n\int_0^{t_1} f(\xi)\cos\omega_n\xi d\xi$$

$$A\sin\phi=\omega_n\int_0^{t_1} f(\xi)\sin\omega_n\xi d\xi$$

则对$t>t_1$时的响应是幅度为A时的简谐运动。请讨论此种情况下响应谱性质。

4-25 一无阻尼的弹簧-质量系统(m,k)，给定一个如图P.4-25 所示的力激励，证明对$t<t_0$：

$$\frac{kx(t)}{F_0}=\frac{1}{\omega_n t_0}(\omega_n t-\sin\omega_n t)$$

对$t>t_0$：

$$\frac{kx(t)}{F_0}=\frac{1}{\omega_n t_0}[\sin\omega_n(t-t_0)-\sin\omega_n t]+\cos\omega_n(t-t_0)$$

4-26 对一无阻尼弹簧-质量系统(m,k)的底座给定一如图 P.4-26 所示的速度脉冲，证明如果尖峰出现在$t<t_1$，则响应谱由下式给出：

$$\frac{\omega_n z_{max}}{v_0}=\frac{1}{\omega_n t_1}-\frac{1}{\omega_n t_1\sqrt{1+(\omega_n t_1)^2}}-\frac{\omega_n t_1}{\sqrt{1+(\omega_n t_1)^2}}$$

并画出此结果。

4-27 对题4-26，如果$t>t_1$，证明其解是：

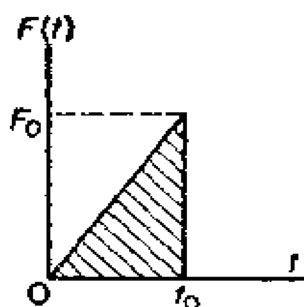


图 P.4-25



图 P.4-26

$$\frac{\omega_n z}{v_0} = -\sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_1}[\cos\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n t]$$

4-28 用数值积分法求题4-10的时间响应。

4-29 用数值积分法求题4-22的时间响应。

4-30 提出一个解题4-26的无阻尼底座激励系统的模拟计算机回路，校验在下列激励下的响应谱：

$$\dot{y}(t) = 60e^{-t/10}, \quad \dot{y}(t) = 60(1-5t)$$

上述激励的响应谱被示于图P.4-30。

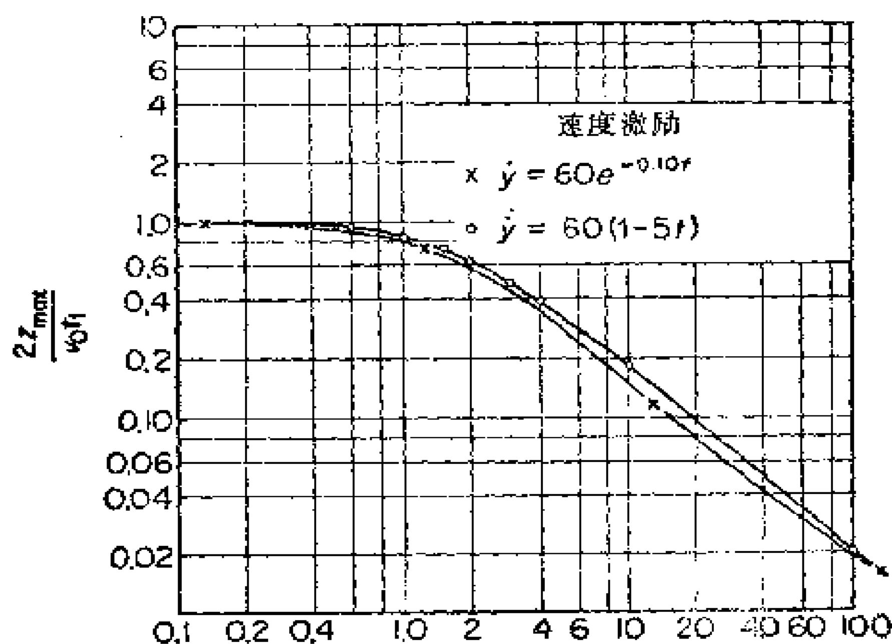


图 P.4-30

4-31 一弹簧-质量系统具有下列方程：

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 100x = 0$$

初始条件$x(0) = 1.0$英寸，$\dot{x}(0) = 3$英寸/秒。用系数10来延慢计算机方程，请确定计算机回路图及其有效计算的比例系数。

4-32 对某一单自由度系统，给定下列值：

$m = 0.122$磅·秒^2/英寸，$k = 6100$磅/英寸，$c = 0.10c_c$

请选择计算机时间，它比实际时间大500倍，并写出此计算机对任意激励$F(t)$的方程；提出适当比例尺的计算机回路。

4-33 写出具有底座激励$y(t)$的阻尼系统的运动方程，画出模拟机的回路，并说明如何测量x和$z = (x - y)$。

4-34 一弹簧-质量系统，具有粘性阻尼，初始状态处于静止，零位移。如果系统受到频率为$\omega = \omega_n = \sqrt{k/m}$的简谐力作用，求运动方程。

4-35 证明题4-34在小阻尼下，振幅将是在$t = 1/f_n\delta$（δ为对数衰减率）时的稳定状态值的$(1 - e^{-1})$倍。

4-36 假定一轻阻尼的系统被一力$F_0\sin\omega_n t$所驱动（ω_n是系统的固有频率），求此力突然移去时的方程。证明，在时间$t = 1/f_n\delta$时振幅衰减到初始值的e^{-1}倍。

第五章　二自由度系统

5.1　导引

当系统需要二个坐标描述其运动时，就说系统具有二个自由度。二自由度系统是研究多自由度系统的简单的导引。

二自由度系统具有两个固有频率。发生在这两个固有频率之一的振动，其两个坐标的振幅间具有确定的比例，这种振动方式称之为主振型 (normal mode)❶。因此二自由度系统具有两个与固有频率相对应的主振型。在任意起始条件下的自由振动一般由这两个主振型振动叠加。但强迫谐振动将发生在激励频率，而这两个坐标的振幅将在这两个固有频率下趋向最大值。

5.2　主振型振动

考虑图5.2-1 所示的无阻尼系统。用 x_1、x_2 表示从起始点算起的两个质量的坐标，则系统的方程为：

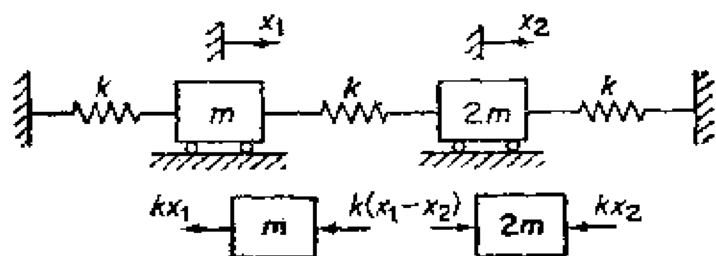


图 5.2-1

❶ 在英文文献中这一词常与 natural mode 交替使用。在本书中为兼顾原文及习惯，一律译为"主振型"——译注。

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - kx_1$$
$$2m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2 \tag{5.2-1}$$

现在我们把主振型振动看作是这样一种振动，即它的每一质量经受同一频率的谐运动且同时通过平衡位置。对这种运动我们可令：

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = A_2 e^{i\omega t} \tag{5.2-2}$$

把它们代入微分方程就给出：

$$(2k - \omega^2 m)A_1 - kA_2 = 0$$
$$-kA_1 + (2k - 2\omega^2 m)A_2 = 0 \tag{5.2-3}$$

如果下列行列式等于零，则上式对任何的A_1、A_2均能满足：

$$\begin{vmatrix} (2k - \omega^2 m) & -k \\ -k & (2k - 2\omega^2 m) \end{vmatrix} = 0 \tag{5.2-4}$$

令 $\omega^2 = \lambda$，则从上列行列式可得**特征方程**：

$$\lambda^2 - \left(3\frac{k}{m}\right)\lambda + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \tag{5.2-5}$$

这个方程具有两个根：

$$\lambda_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\frac{k}{m} = 0.634\frac{k}{m}$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\frac{k}{m} = 2.366\frac{k}{m}$$

因此系统的**固有频率**为：

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0.634\frac{k}{m}}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2.366\frac{k}{m}} \tag{5.2-6}$$

把这些固有频率代入公式（5.2-3）之一可以找到振幅比。对于$\omega_1^2 = 0.634\frac{k}{m}$，我们得：

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(1)}=\frac{k}{2k-\omega_1^2 m}=\frac{1}{2-0.634}=0.731 \qquad (5.2\text{-}7)$$

这是相应于第一主振型的振幅比或振型形状。同样，用$\omega_2^2 = 2.366\frac{k}{m}$，我们得：

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(2)}=\frac{k}{2k-\omega_2^2 m}=\frac{1}{2-2.366}=-2.73 \qquad (5.2\text{-}8)$$

这是相应于第二主振型的振幅比或振型形状。我们可用图5.2-2图解显示这两个主振型。在第一个主振型中二质量同向运动，在第二个主振型中二质量反向运动。

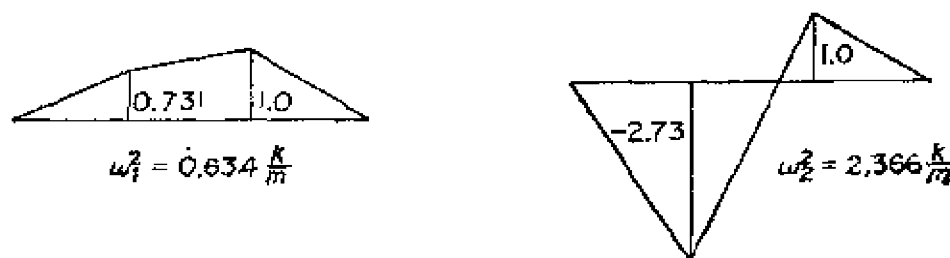


图 5.2-2　图5.2-1系统的主振型

例 5.2-1

对图5.2-1的系统，令中间联系弹簧为nk，计算固有频率和振型形状。

解：令$k/m=\omega_{11}^2$，这时特征方程变为：

$$\omega^4-\frac{3}{2}\omega_{11}^2(1+n)\omega^2+\frac{1}{2}\omega_{11}^4(1+2n)=0$$

两个主振型频率与ω_{11}^2之比为

$$\frac{\omega_{1,2}^2}{\omega_{11}^2}=\frac{3}{4}(1+n)\pm\sqrt{\frac{9}{16}(1+n)^2-\frac{1}{2}(1+2n)}$$

变化n值可得如下的$(\omega_1/\omega_{11})^2$及$(\omega_2/\omega_{11})^2$的值，并画成图5.2-3。可以看出$(\omega_1/\omega_{11})^2$几乎保持不变。

主振型频率与 n 的关系

n	$(\omega_1/\omega_{11})^2$	$(\omega_2/\omega_{11})^2$
0	0.50	1.0
0.5	0.611	1.641
1.0	0.634	2.366
2.0	0.650	3.850
4.0	0.660	6.840
10.0	0.666	15.83
100.0	0.666	150.8
∞	0.666	∞

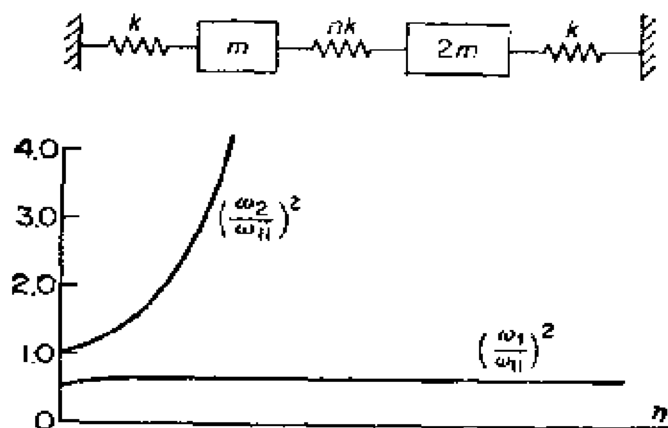


图 5.2-3 固有频率与n的关系

现在可以找到任意值 n 时的振幅比：

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(1)} = \frac{1+n-2(\omega_1/\omega_{11})^2}{n}$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(2)} = \frac{1+n-2(\omega_2/\omega_{11})^2}{n}$$

例如对 $n = 4$，两个主振型见 图 5.2-4。

例 5.2-2

图 5.2-5 表示了两个摆用弱弹簧 k 耦合，当两个摆杆处于铅垂位置时弹簧不张紧，求主振型。

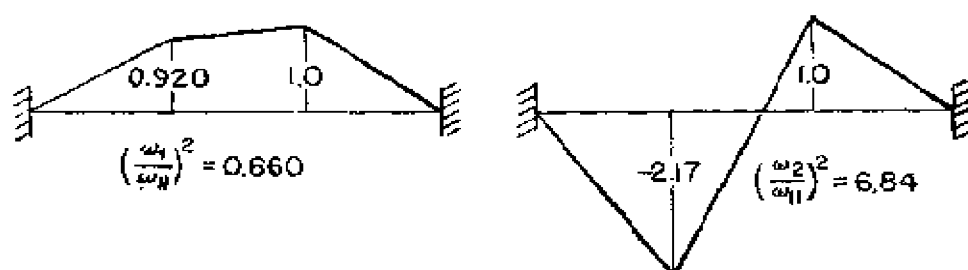


图 5.2-4　图5.2-3系统当$n=4$时的主振型

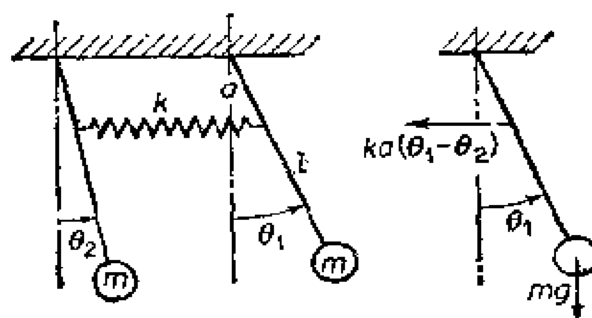


图 5.2-5　耦合摆

解：设反时针的角变位为正，对摆的支承点取矩，得下列微小摆动时的运动微分方程：

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 - ka^2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -mgl\theta_2 + ka^2(\theta_1 - \theta_2)$$

假定主振型的解为：

$$\theta_1 = A_1\cos\omega t$$

$$\theta_2 = A_2\cos\omega t$$

则固有频率和振型形状为：

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}}$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(1)} = 1.0 \qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(2)} = -1.0$$

这表示在第一振型时两个摆同相运动而且弹簧松弛；在第二振型时两个摆反向运动而且弹簧被张紧，但它的中点是个节点(不移动)，而且固有频率也较高。

例 5.2-3

如果对例 5.2-2 的耦合摆给以与主振型不同的起始条件的运动，则摆动将同时包含两个主振型。例如如果起始条件 $\theta_1(0)=A$，$\theta_2(0)=0$，则运动方程将为：

$$\theta_1(t)=\frac{1}{2}A\cos\omega_1 t+\frac{1}{2}A\cos\omega_2 t$$

$$\theta_2(t)=\frac{1}{2}A\cos\omega_1 t-\frac{1}{2}A\cos\omega_2 t$$

考虑那种情况，即耦合弹簧很弱，证明两个摆间要发生拍现象。

解：上列运动方程可以改写为：

$$\theta_1(t)=A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

$$\theta_2(t)=-A\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

因为$(\omega_1-\omega_2)$很小，因此$\theta_1(t)$和 $\theta_2(t)$ 可以看作分别按 $\cos(\omega_1+\omega_2)t/2$及$\sin(\omega_1+\omega_2)t/2$变化，而其振幅又按图5.2-6所示逐渐变化。由于这是保守系统，因此能量从一个摆向另一个摆传递。

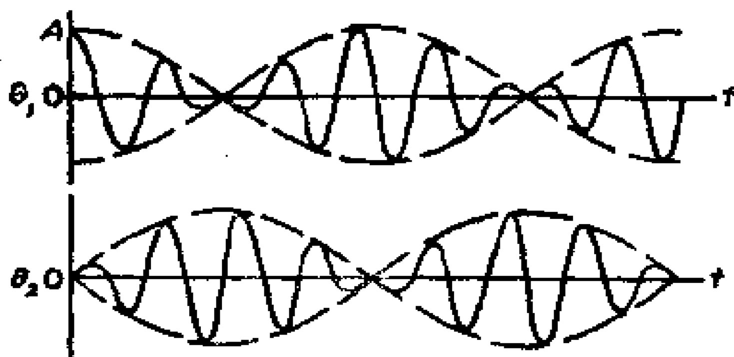


图 5.2-6 摆间能量变换

例 5.2-4

如图5.2-7的系统，质量和弹簧分别等于m和k，则主振型变为：

$$\omega_1^2=\frac{k}{m}\qquad\omega_2^2=\frac{3k}{m}$$

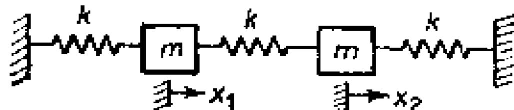


图 5.2-7

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(1)} = 1 \qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(2)} = -1$$

求在下列起始条件下的系统自由振动。

$$x_1(0)=5, \quad x_2(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$$

解：任一自由振动均可考虑为二个主振型的叠加。这样，两个变位可以写成：

$$\begin{aligned} x_1 &= A\sin(\omega_1 t+\psi_1) - B\sin(\omega_2 t+\psi_2) \\ x_2 &= A\sin(\omega_1 t+\psi_1) + B\sin(\omega_2 t+\psi_2) \end{aligned} \tag{a}$$

上式右边第一项是固有频率为 ω_1 的主振型，它的振幅比同样是 $A_1/A_2 = A/A = 1$，它是第一振型形状。频率为ω_2的第二项振动，其振幅比为：$B_1/B_2 = -B/B = -1$，它与第二主振型相同。相位角ψ_1和ψ_2完全允许时间点的自由更换而不改变主振型的特征。常数A、B、ψ_1 和 ψ_2 足够满足四个边界条件，这些边界条件可以任意选择。令$t=0$时$x_1(0)=5$，$x_2(0)=0$，我们得：

$$\begin{aligned} 5 &= A\sin\psi_1 - B\sin\psi_2 \\ 0 &= A\sin\psi_1 + B\sin\psi_2 \end{aligned}$$

把上列两式相加和相减，得：

$$\begin{aligned} A\sin\psi_1 &= 2.5 \\ B\sin\psi_2 &= -2.5 \end{aligned}$$

对(a)式求导得速度，令 $t=0$，得另两个方程：

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1 A\cos\psi_1 - \omega_2 B\cos\psi_2 \\ 0 &= \omega_1 A\cos\psi_1 + \omega_2 B\cos\psi_2 \end{aligned}$$

从此得：

$$\begin{aligned} \cos\psi_1 = 0 \qquad &\text{或} \qquad \psi_1 = 90^\circ \\ \cos\psi_2 = 0 \qquad &\text{或} \qquad \psi_2 = 90^\circ \end{aligned}$$

很容易看出，它的解为：

$$x_1 = 2.5\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + 2.5\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t$$

$$x_2 = 2.5\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - 2.5\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t$$

也可以用矩阵形式写成：

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 2.5\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - 2.5\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t$$

5.3　坐标耦合

二自由度系统的运动微分方程一般是耦合的，每一方程中两个坐标均存在。在最一般情况下，对无阻尼系统，两方程具有下列形式：

$$m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0$$

$$m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0$$

这些方程可用矩阵形式表示（见附录C）：

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

它直接显示了耦合的类型。如果质量矩阵是非对角线的，则质量或动力耦合存在。如果刚度矩阵是非对角线的，则刚度或静力耦合存在。

同样可以从动能和位能的表达式确定耦合方式。两个表达式坐标的叉积表明了耦合的形式，究竟是静力的还是动力的要看是在 T 中还是在 U 中出现。坐标的选择确定了耦合的类型。静力和动力耦合可以都存在。

可以找到一种两者无耦合的坐标系统，因而两方程就没有联系，两个方程可以单独求解。这种坐标称之为主坐标（也称为正坐标）。

尽管对无阻尼系统总可以找到无耦合的运动方程，而对有阻尼系统则不一定。下列矩阵表示了零动力和零静力耦合的方程，但阻尼矩阵是有坐标耦合的：

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{22} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

如果上列方程中 $c_{12}=c_{21}=0$，则这种阻尼是所谓比例阻尼（与刚度或质量矩阵成比例），而系统方程变成为无耦合方程。

例 5.3-1

图5.3-1表示一重心与几何中心不重合的刚杆（即$l_1 \neq l_2$），并用两只弹簧k_1、k_2支承。因要用二个坐标来描述系统的运动，因而是二自由度系统。坐标的选择将决定耦合的类型，它可以直接由质量和刚度矩阵确定。如果质量矩阵是非对角线的，则质量或动力耦合存在；如果刚度矩阵是非对角线的，则刚度或静力耦合存在。同样也可能两种耦合形式都有。

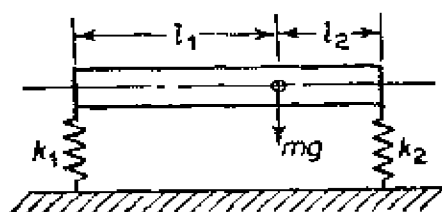


图 5.3-1

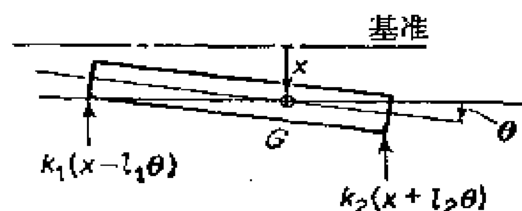


图 5.3-2 静力耦合的坐标系

静力耦合 选择坐标x和θ如图5.3-2，这里x是质量中心的线性位移。正如下面方程所表示的，这个系统有静力耦合：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & (k_2l_2-k_1l_1) \\ (k_2l_2-k_1l_1) & (k_1l_1^2+k_2l_2^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

如果 $k_1l_1=k_2l_2$，则耦合将消失，因而就得到x和θ无关的振动。

动力耦合 沿杆有某点C，当力垂直作用于该点时杆将产生纯横向移动，即 $k_1l_3=k_2l_4$，用 x_C和θ写的运动方程可表示为：

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & 0 \\ 0 & (k_1l_3^2+k_2l_4^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_C \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

这说明，坐标变换后消去了静力耦合而成为动力耦合。

静力和动力耦合 如果取杆端为坐标$x=x_1$，则运动方程为：

$$\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & J_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & k_2l \\ k_2l & k_2l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

这时静力耦合和动力耦合均存在。

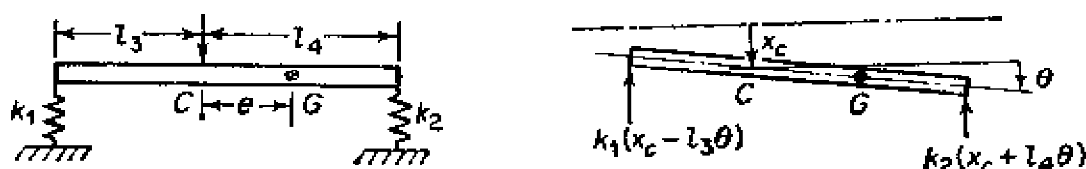


图 5.3-3 改为动力耦合的坐标

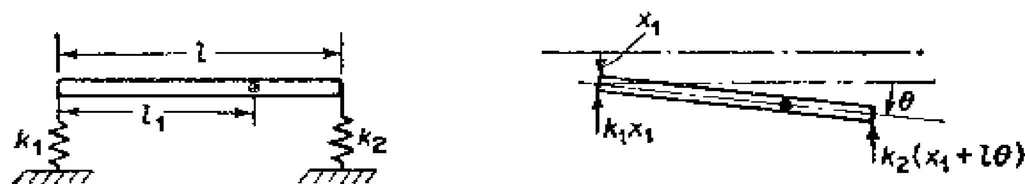


图 5.3-4 有静、动耦合的坐标

例 5.3-2

确定具有下列数值的简化为二个自由度的汽车振动的主振型：

$W=3220$磅　　$l_1=4.5$英尺　　$k_1=2400$磅/英尺

$J_C=\frac{W}{g}r^2$　　$l_2=5.5$英尺　　$k_2=2600$磅/英尺

$r=4$英尺　　$l=10$英尺

具有静力耦合的运动方程为：

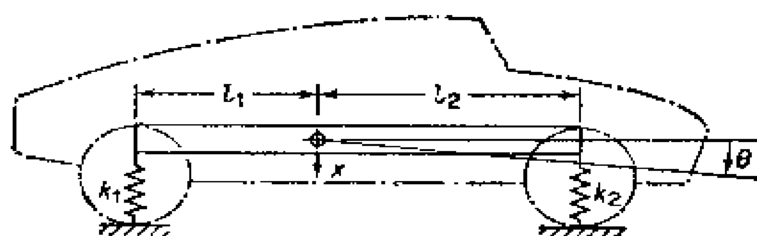


图 5.3-5

$$m\ddot{x}+k_1(x-l_1\theta)+k_2(x+l_2\theta)=0$$

$$J_C\ddot{\theta}-k_1(x-l_1\theta)l_1+k_2(x+l_2\theta)l_2=0$$

假定一谐运动，我们有：

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2-\omega^2 m) & -(k_1 l_1-k_2 l_2) \\ -(k_1 l_1-k_2 l_2) & (k_1 l_1^2+k_2 l_2^2-\omega^2 J_C) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

根据矩阵方程的行列式，两个固有频率为：

$$\omega_1 = 6.90\text{弧度/秒} = 1.10\text{周/秒}$$

$$\omega_2 = 9.06\text{弧度/秒} = 1.44\text{周/秒}$$

这两个频率下的振幅比是：

$$\left(\frac{x}{\theta}\right)_{\omega_1} = -14.6\text{英尺/弧度} = -3.06\text{英寸/度}$$

$$\left(\frac{x}{\theta}\right)_{\omega_2} = 1.09\text{英尺/弧度} = 0.288\text{英寸/度}$$

振型形状示于图5.3-6。

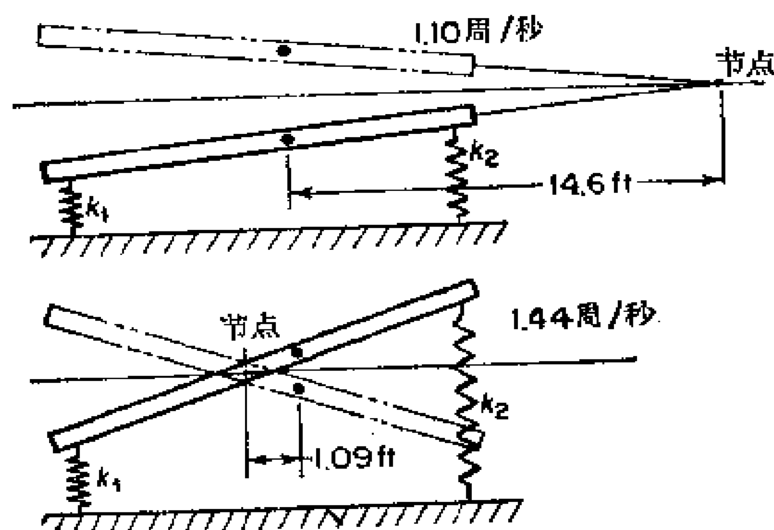


图 5.3-6　图5.3-5系统的主振型

5.4　谐强迫振动

这里考虑受简谐力 $F_1\sin\omega t$ 激励的振动。假定运动可用下列矩阵方程表示：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin\omega t \quad (5.4\text{-}1)$$

假定它的解为：

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

把这个解代入上列方程得：

$$\begin{bmatrix} (k_{11} - m_1\omega^2) & k_{12} \\ k_{21} & (k_{22} - m_2\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4\text{-}2)$$

或用更简化的符号：

$$[Z(\omega)] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

用 $[Z(\omega)]^{-1}$ 相乘得（见附录C）：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = [Z(\omega)]^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{adj\,[Z(\omega)] \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{|Z(\omega)|} \quad (5.4\text{-}3)$$

根据方程(5.4-2)，行列式$|Z(\omega)|$可以表示为：

$$|Z(\omega)| = m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \quad (5.4\text{-}4)$$

式中ω_1、ω_2是主振型频率。这样公式(5.4-3)变为：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|Z(\omega)|} \begin{bmatrix} (k_{22} - m_2\omega^2) & -k_{12} \\ -k_{21} & (k_{11} - m_1\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4\text{-}5)$$

或

$$X_1 = \frac{(k_{22} - m_2\omega^2) F}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$
$$X_2 = \frac{-k_{12} F}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \quad (5.4\text{-}6)$$

例 5.4-1

应用5.4节的公式(5.4-6)于图 5.4-1 所示的系统，其中 m_1 受到$F_1 \sin \omega t$力的激励，画出它的频率响应曲线。

解：以矩阵形式表示的运动方程为：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin\omega t$$

这样，我们有$k_{11} = k_{22} = 2k$；$k_{12} = k_{21} = -k$；$\omega_1^2 = k/m$；$\omega_2^2 =$

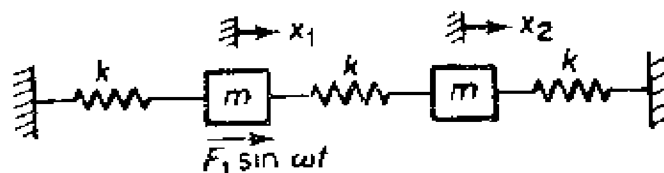


图 5.4-1

$3k/m$。从此公式(5.4-6)就变为：

$$X_1=\frac{(2k-m\omega^2)F_1}{m^2(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)}$$

$$X_2=\frac{kF_1}{m^2(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)}$$

为了方便，把上式化为部分分式。对X_1，我们得：

$$\frac{(2k-m\omega^2)F_1}{m^2(\omega_1^2-\omega^2)\ (\omega_2^2-\omega^2)}=\frac{C_1}{(\omega_1^2-\omega^2)}+\frac{C_2}{(\omega_2^2-\omega^2)}$$

为了解得C_1，用$(\omega_1^2-\omega^2)$乘之并令$\omega=\omega_1$得：

$$C_1=\frac{(2k-m\omega_1^2)F_1}{m^2(\omega_2^2-\omega_1^2)}=\frac{F_1}{2m}$$

同样，C_2可用乘$(\omega_2^2-\omega^2)$并令 $\omega=\omega_2$ 的方法计算得：

$$C_2=\frac{(2k-m\omega_2^2)F_1}{m^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}=\frac{F_1}{2m}$$

从此得X_1 的一种形式：

$$X_1=\frac{F_1}{2m}\left[\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}+\frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right]$$

$$=\frac{F_1}{2k}\left[\frac{1}{1-(\omega/\omega_1)^2}+\frac{1}{3-(\omega/\omega_1)^2}\right]$$

用同样方法可得X_2的公式

$$X_2=\frac{F_1}{2k}\left[\frac{1}{1-(\omega/\omega_1)^2}-\frac{1}{3-(\omega/\omega_1)^2}\right]$$

频率响应曲线示于 图 5.4-2。

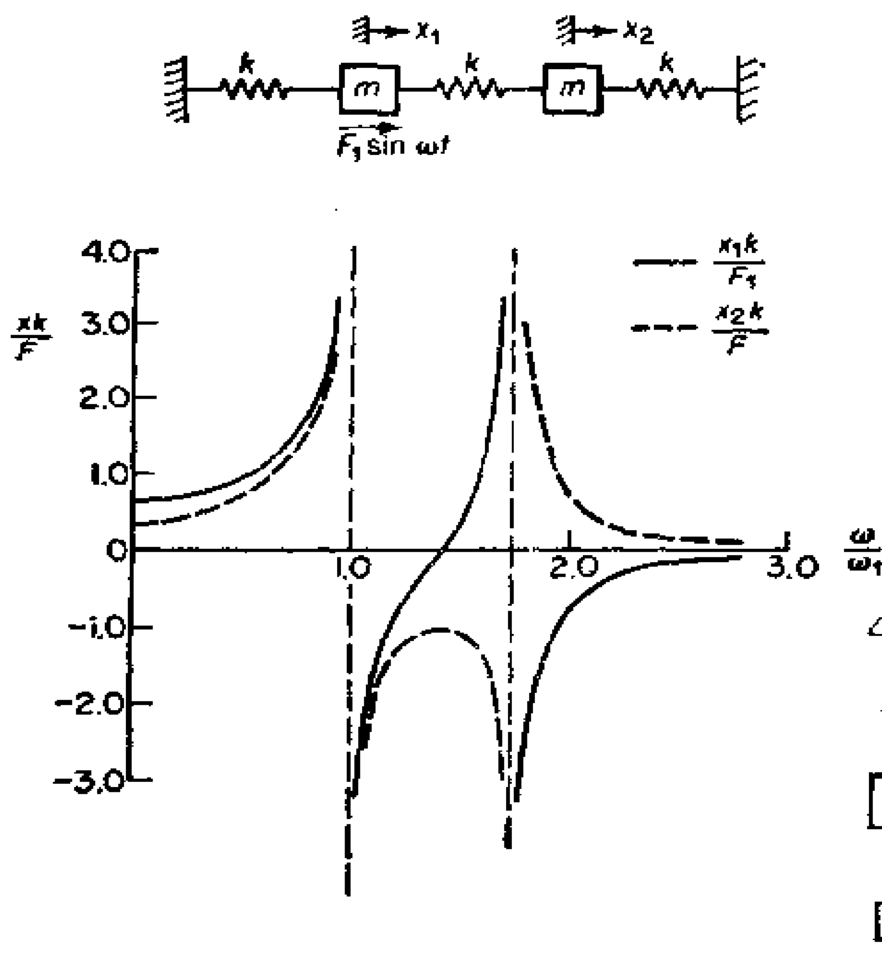


图 5.4-2 二自由度系统的强迫响应

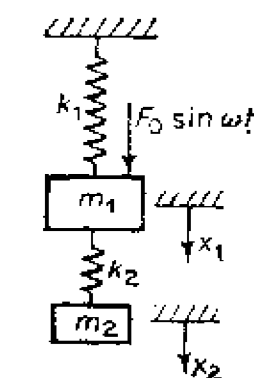


图 5.5-1 吸振器

5.5 吸振器

图 5.5-1 所示为一弹簧-质量系统 k_2、m_2，它的频率调至与激励力的频率一致，即 $\omega^2=k_2/m_2$，它将作为吸振器以使主质量 m_1的运动减小到零。作如下置换：

$$\omega_{11}^2=\frac{k_1}{m_1} \qquad \omega_{22}^2=\frac{k_2}{m_2}$$

同时假定是谐运动，则振幅X_1的方程为：

$$\frac{X_1k_1}{F_0}=\frac{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]}{\left[1+\frac{k_2}{k_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]-\frac{k_2}{k_1}}\quad(5.5\text{-}1)$$

图 5.5-2 画出以 $\mu=m_2/m_1$ 为参量的上述等式之关系。注意

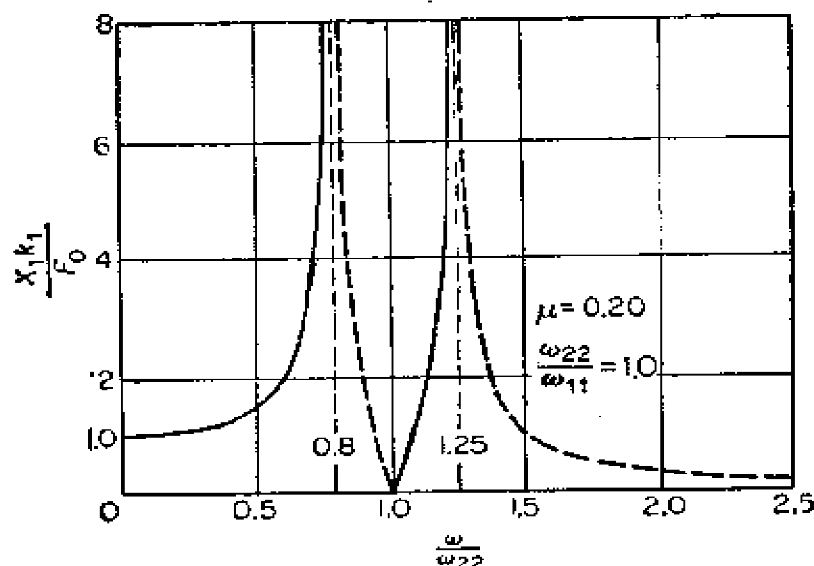


图 5.5-2 响应与频率的函数关系

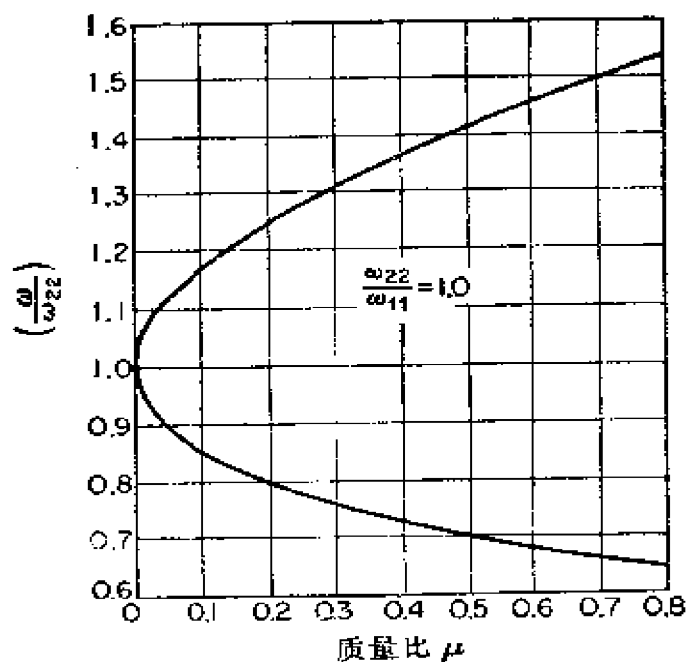


图 5.5-3 固有频率与$\mu=m_2/m_1$的函数关系

$k_2/k_1=\mu(\omega_{22}/\omega_{11})^2$。由于系统是个二自由度系统，因而有两个固有频率。频率比与 μ 的关系示于图 5.5-3。

到现在为止还没有讲到吸振器质量的大小。当$\omega=\omega_{22}$时，振幅$X_1=0$，但吸振器质量的振幅等于：

$$X_2=-\frac{F_0}{k_2} \tag{5.5-2}$$

因为作用在质量 m_2 上的力是：

$$k_2X_2=\omega^2 m_2 X_2=-F_0$$

因此吸振器系统k_2，m_2作用一个与干扰力大小相等方向相反的力，故k_2、m_2的大小与X_2的允许值有关。

5.6 离心摆吸振器

5.5节所述的吸振器仅在一个频率 $\omega=\omega_{22}$ 时起作用。同样，在 ω_{22} 每一侧的共振频率，弹簧-质量系统的有效性受到严格的限制。

对于有如汽车发动机这样的旋转系统，激励扭矩是正比于转速 n 的，它可以在很大的范围内变化。因此，有效的吸振器，它的固有频率同样必须正比于速度。离心摆的特性对满足这一目的是很理想的。

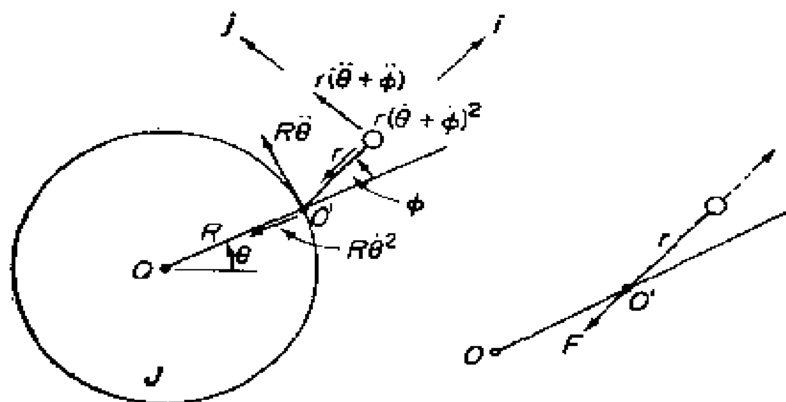


图 5.6-1 离心摆吸振器

图 5.6-1 表示了离心摆的实质。他是一个二自由度的非线性系统；但是，我们将限制其在很小摆角，因而减小了它的复杂性。

通过O'点取平行和垂直于 r 的坐标，线 r 以角速度$(\dot{\theta}+\dot{\phi})$旋转。$m$的加速度等于 O' 的加速度和m相对于O 点的加速度的矢量和。

$$a_m=[R\ddot{\theta}\sin\phi-R\dot{\theta}^2\cos\phi-r(\dot{\theta}+\dot{\phi})^2]\,\boldsymbol{i}$$
$$+[R\ddot{\theta}\cos\phi+R\dot{\theta}^2\sin\phi+r(\ddot{\theta}+\ddot{\phi})]\,\boldsymbol{j} \qquad (5.6\text{-}1)$$

根据对 O'点的力矩等于零，得：

$$m[R\ddot{\theta}\cos\phi+R\dot{\theta}^2\sin\phi+r(\ddot{\theta}+\ddot{\phi})]r=0 \qquad (5.6\text{-}2)$$

假定ϕ角很小，令 $\cos\phi=1$，$\sin\phi=\phi$，便得摆的方程：

$$\ddot{\phi}+\left(\frac{R}{r}\dot{\theta}^2\right)\phi=-\left(\frac{R+r}{r}\right)\ddot{\theta} \qquad (5.6\text{-}3)$$

作用在大轮子上的力是摆力，沿 r 方向的是：

$$F=m[R\ddot{\theta}\cos\phi+R\dot{\theta}^2\sin\phi+r(\ddot{\theta}+\ddot{\phi})] \qquad (5.6\text{-}4)$$

这个力在大轮上的力矩是 $FR\sin\phi$，于是假定角度很小，便得第二个方程：

$$J\ddot{\theta}=m[R\ddot{\theta}+R\dot{\theta}^2\phi+r(\ddot{\theta}+\ddot{\phi})]R\phi+T \qquad (5.6\text{-}5)$$

式中 T 是作用在大轮上的干扰扭矩。

角度 ϕ、θ 需要同时解两个方程 (5.6-3)和(5.6-5)，这显然是不能实现的。因此，我们改为假定轮子的运动为稳定旋转 n 再加上小的正弦摆动如下：

$$\theta=nt+\theta_0\sin\omega t$$
$$\dot{\theta}=n+\omega\theta_0\cos\omega t\cong n$$
$$\ddot{\theta}=-\omega^2\theta_0\sin\omega t \qquad (5.6\text{-}6)$$

于是等式(5.6-3)变为：

$$\ddot{\phi}+\left(\frac{R}{r}n^2\right)\phi=\left(\frac{R+r}{r}\right)\omega^2\theta_0\sin\omega t \qquad (5.6\text{-}3')$$

回想起摆的固有频率是：

$$\omega_n = n\sqrt{\frac{R}{r}} \tag{5.6-7}$$

假定稳定状态解 $\phi=\phi_0\sin\omega t$，则振幅比为：

$$\theta_0/\phi_0 = \frac{\frac{n^2R}{r}-\omega^2}{\left(\frac{R+r}{r}\right)\omega^2} \tag{5.6-8}$$

这一公式清楚地指出，当 $\omega=n\sqrt{R/r}$ 时，轮的摆动角θ_0变成零。

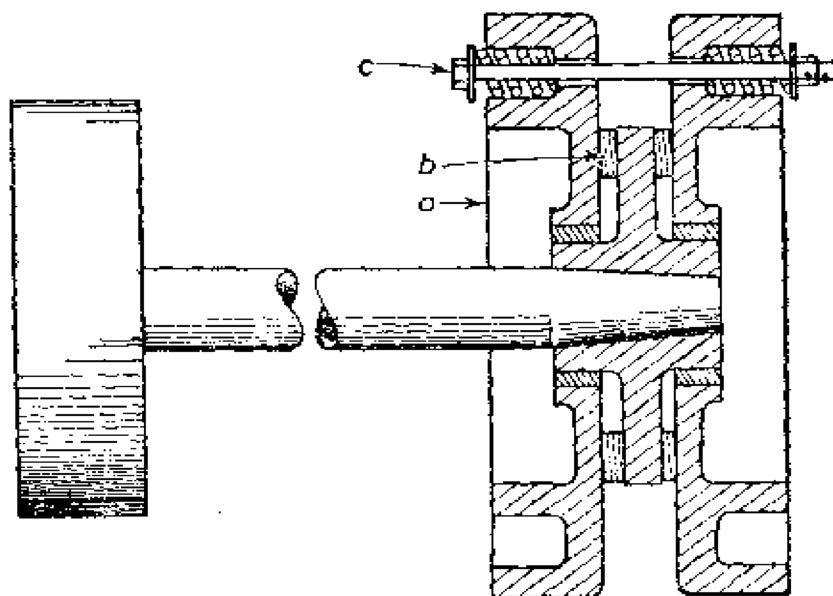


图 5.7-1 扭振阻尼器

5.7 振动阻尼器

与对消激励力的吸振器不同，振动阻尼器是消耗能量的。图5.7-1表示一种摩擦类型的振动阻尼器，一般称之为朗却斯特(Lanchester)阻尼器。它在扭转系统中得到实际应用，如燃气机和内燃机中用来限制临界转速下的振幅。阻尼器由两个飞轮 a 构成，飞轮可在轴上自由转动，只有负荷螺栓 c 压紧从而在摩擦环 b 中存在正压力的情况下才能驱动。

在适当调节下，对小摆动飞轮可随轴一起旋转。但是，当轴的扭摆趋向变大时，由于飞轮的惯性较大，它就不跟随轴一起运动，因此便由相对运动的摩擦而消耗能量。由能量消耗而限制了摆动振幅，因而防止了轴的高的扭转应力。

尽管扭转阻尼器很简单，但对它性状的数学分析却颇为复杂。譬如，依照弹簧螺栓压力的不同，飞轮可能是连续滑动、部分滑动或者根本不滑动。如果摩擦环上的压力对滑动来说过大或者为零，那么就没有能量被消耗，因而阻尼器便无效。显然，最大能量消耗发生在某一适中的压力，这时形成阻尼器的最佳效果。

为了对这一问题有一了解，我们来考虑飞轮作连续滑动这一简单情况。假定轴心以它的平均角速度振荡（图 5.7-2），飞轮将以不变的摩擦力矩 T 滑动。表为速度曲线斜率的飞轮的加速度是不变的而且等于 T/J，这里 J 是飞轮的惯性矩，而它的速度以一系列直线表示。当轴的速度大过飞轮速度时，飞轮的速度就增加；当轴的速度下降到低于飞轮速度时，飞轮的速度就下降，正如图上所表示的。

阻尼器所做的功：

$$W=\int Td\theta=T\int\omega'dt \qquad (5.7\text{-}1)$$

式中 ω' 是相对速度。功等于扭矩和图 5.7-2 中影线表示的面积的乘积。由于影线面积对大的 T 时较小，小的 T 值时较大，因此最大的消耗能量是某一适中的 T 值[1]。

显然，阻尼器应放在振幅最大处。这个位置一般是从离开主飞轮的轴侧去找，因为节点一般靠近最大质量处。

非调谐粘性振动阻尼器 象汽车发动机这样一些旋转机械，扭转扰动频率一般正比于转速，而这种频率不止一个。离心摆的的缺点是：必须应用好多个调谐到指定级数的离心摆，以适应不同的干扰。与离心摆相反，非调谐阻尼器能在很广的使用范围内有

[1] J.P. Den Hartog and J. Ormondroyd, "Torsional-Vibration Dampers," *Trans.SME* APM-52-13(September-December,1930),pp.133-152.

效。如图 5.7-3 所示，它有一质量J_d，可在充满粘性液体的圆柱腔内自由转动。这种系统一般与驱动风扇的皮带的曲轴端轮装在一起，通常称之为霍戴尔（Houdaille）阻尼器。

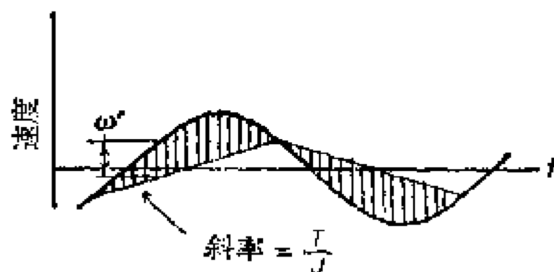


图 5.7-2 连续滑动的扭转阻尼器

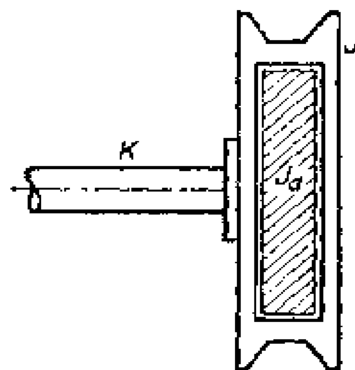


图 5.7-3 非调谐粘性阻尼器

我们可把非调谐粘性阻尼器与装它的曲轴看作二自由度系统来考察：曲轴的一端固定，另一端安装阻尼器。轴的扭转刚度等于K（英寸·磅/弧度），阻尼器看作是由谐扭矩$M_0e^{i\omega t}$激励的。阻尼器扭矩由轮子空间中液体粘性产生，同时我们假定它正比于轮子与自由质量间的相对转动速度。这样，轮子和自由质量的两个运动方程为：

$$J\ddot{\theta} + K\theta + c(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = M_0e^{i\omega t}$$
$$J_d\ddot{\varphi} - c(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = 0 \tag{5.7-2}$$

假定解的形式是：

$$\theta = \theta_0e^{i\omega t}$$
$$\varphi = \varphi_0e^{i\omega t} \tag{5.7-3}$$

式中θ_0、φ_0是复振幅，把这些公式代入微分方程得：

$$\left[\left(\frac{K}{J} - \omega^2\right) + i\frac{c\omega}{J}\right]\theta_0 - \frac{ic\omega}{J}\varphi_0 = \frac{M_0}{J}$$

$$\left(-\omega^2 + i\frac{c\omega}{J_d}\right)\varphi_0 = \frac{ic\omega}{J_d}\theta_0 \tag{5.7-4}$$

消去φ_0，轮子振幅θ_0的表达式变为：

$$\frac{\theta_0}{M_0}=\frac{(\omega^2 J_d - ic\omega)}{[\omega^2 J_d(K-J\omega^2)]+ic\omega[\omega^2 J_d-(K-J\omega^2)]} \quad (5.7\text{-}5)$$

令 $\omega_n^2=K/J$，$\mu=J_d/J$，临界阻尼是：

$$c_c=2J\omega_n,\quad c=\frac{c}{c_c}2J\omega_n=2\zeta J\omega_n$$

因此，振幅方程变成：

$$\left|\frac{K\theta_0}{M_0}\right|=\sqrt{\frac{\mu^2(\omega/\omega_n)^2+4\zeta^2}{\mu^2(\omega/\omega_n)^2(1-\omega^2/\omega_n^2)^2+4\zeta^2[\mu(\omega/\omega_n)^2-(1-\omega^2/\omega_n^2)]^2}}$$

(5.7-6)

公式说明，$|K\theta_0/M_0|$是三个参数：ζ，μ及ω/ω_n的函数。如果μ保持不变，把$|K\theta_0/M_0|$画成与(ω/ω_n)成函数关系的曲线，则对任一ζ值的曲线将与单自由度具有单一峰值的曲线多少有些相似。重要的是两个极限值$\zeta=0$，$\zeta=\infty$的情况。当$\zeta=0$，我们得到具有共振频率$\omega_n=\sqrt{K/J}$的无阻尼系统，在这一频率上振幅将无限大。如果$\zeta=\infty$，则阻尼器质量与轮子将作为单一质量运动，这同样是一无阻尼系统，但它的固有频率是：

$$\sqrt{K/(J+J_d)}。$$

因此，和上节的朗却斯特阻尼器相似，如图5.7-4所表示的，有

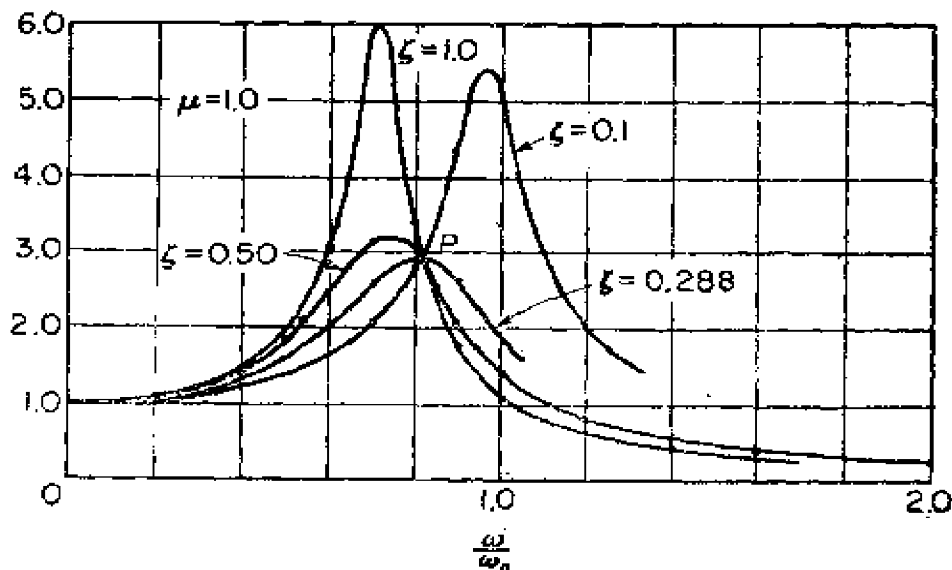


图 5.7-4 非调谐阻尼器响应（所有曲线通过P点）

一个最佳的ζ_0，在此ζ_0下尖峰振幅最小。这一结果可以从尖峰值与ζ值的关系曲线（对任何给定的μ值）得到，如图5.7-5。

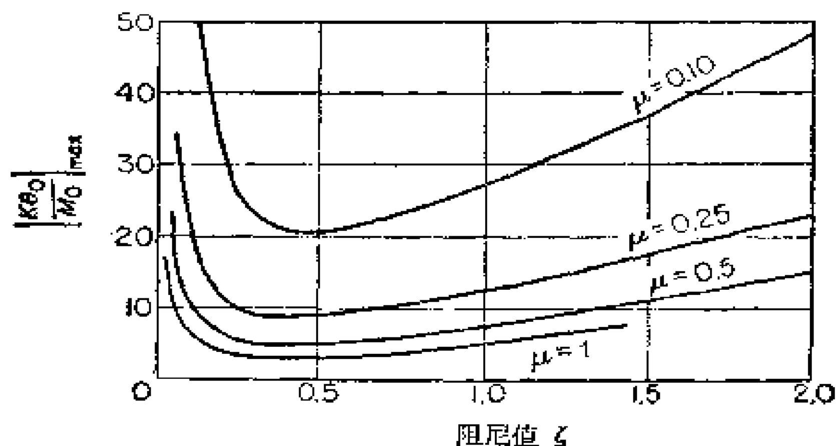


图 5.7-5 峰值与ζ函数关系的图解

可以指出，最佳阻尼等于：

$$\zeta_0 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}} \tag{5.7-7}$$

在最佳阻尼下，峰值振幅所在的频率等于：

$$\frac{\omega_n}{\omega} = \sqrt{2/(2+\mu)} \tag{5.7-8}$$

这些结论可以从观察图 5.7-4 的曲线得到。所有的曲线都通过共同点P而与ζ值无关。因此，使$\zeta=0$和$\zeta=\infty$这两种情况下的$|K\theta_0/M_0|$相等。便可得到(5.7-8)式。而且，最佳阻尼的曲线必须通过P点而且斜率为零，因此如果我们把$(\omega/\omega_n)^2=2/(2+\mu)$代入等式（5.7-6）并使它等于同一频率下无阻尼曲线的振幅，便可找到ζ_0的表达式。很明显，这一结论也适用于如图5.7-6所示的线性弹簧-质量系统，这是一个阻尼器的弹簧等于零的阻尼吸振器的一种特殊情况。

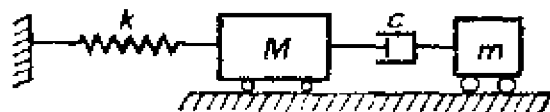


图 5.7-6 非调谐粘性阻尼器

5.8 旋转轴的陀螺效应

具有角动量H的一转轮和轴，在某些条件下会引起陀螺力矩，因此，联合挠度和倾角便产生二自由度问题。我们将依照图5.8-1所示的在悬臂轴旋转的轮子来说明这种效应。

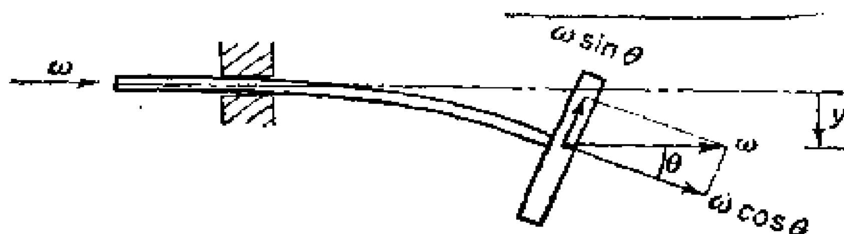


图 5.8-1 陀螺效应

如果轴的转速为ω，它在平行于和垂直于轮面方向的分量是$\omega\sin\theta$和$\omega\cos\theta$，因此在这些方向的角动量是：$J_d\omega\sin\theta$ 和$J_p\omega\cos\theta$，其中J_p和J_d是轮子在极轴向和径向的惯性矩。

把这些矢量分解为ω向及垂直于ω向，则垂直于ω向的分量是：

$$
\begin{aligned}
H_n &= J_p\omega\cos\theta\sin\theta - J_d\omega\sin\theta\cos\theta \\
&= (J_p - J_d)\omega\cos\theta\sin\theta \qquad (5.8\text{-}1)
\end{aligned}
$$

如果轴的挠度平面以速度ω旋曲，则轮上的力矩必然等于$H_n\omega_1$，而H在平行ω的方向仍然不变。因而作用在轴上的是负力矩：

$$
\begin{aligned}
M &= -H_n\omega_1 = -(J_p - J_d)\omega\omega_1\cos\theta\sin\theta \\
&\cong -(J_p - J_d)\omega\omega_1\theta \qquad (5.8\text{-}2)
\end{aligned}
$$

为了考虑此时轴的挠曲形状，我们可以写出轴端的挠度和倾角方程：

$$
\left.
\begin{aligned}
y &= F\frac{l^3}{3EI} + M\frac{l^2}{2EI} \\
\theta &= F\frac{l^2}{2EI} + M\frac{l}{EI}
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.8\text{-}3)
$$

式中 F、M的系数是由于作用在轴端上单位力和单位力矩产生的挠度和倾角的影响函数，F、M 是作用在轴端上的力和弯矩。力F就等于 $m\omega_1^2 y$，M是陀螺力矩$-(J_p-J_d)\omega\omega_1\theta$，因此等式(5.8-3)变为：

$$
\begin{aligned}
y &= \left(m\omega_1^2\frac{l^3}{3EI}\right)y-\left[(J_p-J_d)\omega\omega_1\frac{l^2}{2EI}\right]\theta \\
\theta &= \left(m\omega_1^2\frac{l^2}{2EI}\right)y-\left[(J_p-J_d)\omega\omega_1\frac{l}{EI}\right]\theta
\end{aligned}
\qquad (5.8\text{-}4)
$$

对于一个失衡的轮子或圆盘，我们曾在 3.4 节得到旋曲速度ω_1可能等于ω，这样，频率方程可取下式：

$$
\left(1-\frac{m\omega^2 l^3}{3EI}\right)\left[1+(J_p-J_d)\omega^2\frac{l}{EI}\right]+
$$

$$
+\left(m\omega^2\frac{l^2}{2EI}\right)\left[(J_p-J_d)\omega^2\frac{l^2}{2EI}\right]=0 \qquad (5.8\text{-}5)
$$

对于近似于薄盘的轮子，$J_p=2J_d$，因此频率方程简化为：

$$
\omega^4+\frac{12EI}{mJ_d l^3}\left(\frac{ml^2}{3}-J_d\right)\omega^2-\frac{12}{mJ_d}\left(\frac{EI}{l^2}\right)^2=0 \qquad (5.8\text{-}6)
$$

因为在没有陀螺力矩时，系统的固有频率是：

$$
\omega_y=\sqrt{3EI/ml^3},
$$

故可把频率方程改写为：

$$
\omega^4+4\omega_y^2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\omega^2-\frac{4}{\alpha}\omega_y^4=0 \qquad (5.8\text{-}7)
$$

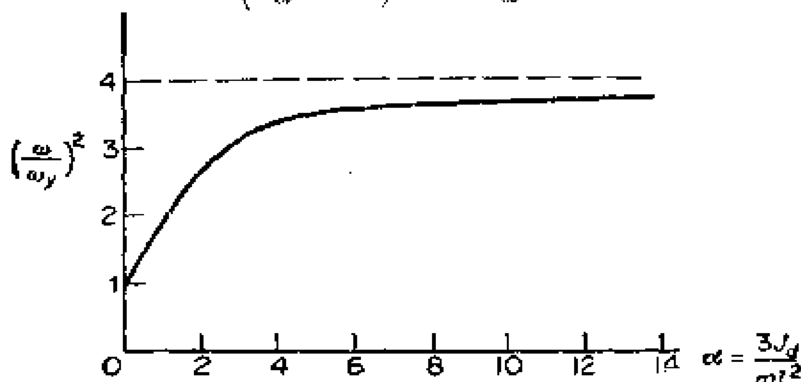


图 5.8-2　方程5.8-7的解

式中$\alpha = 3J_A/ml^2$可以看作是耦合项。$(\omega/\omega_y)^2$与α的关系表示在图5.8-2。对于很大的α值，比值θ/y近似等于零，而且系统的固有频率趋向于下列值：

$$\omega = \sqrt{12EI/Kl^3}$$

5.9 数值计算

4.7节叙述的有限差分法很容易推广到解二自由度系统。我们用下列问题来说明解题步骤并编成程序，用数字计算机计算。

要解的问题示于图5.9-1。为了避免注脚的混乱，我们令x、y表示位移。

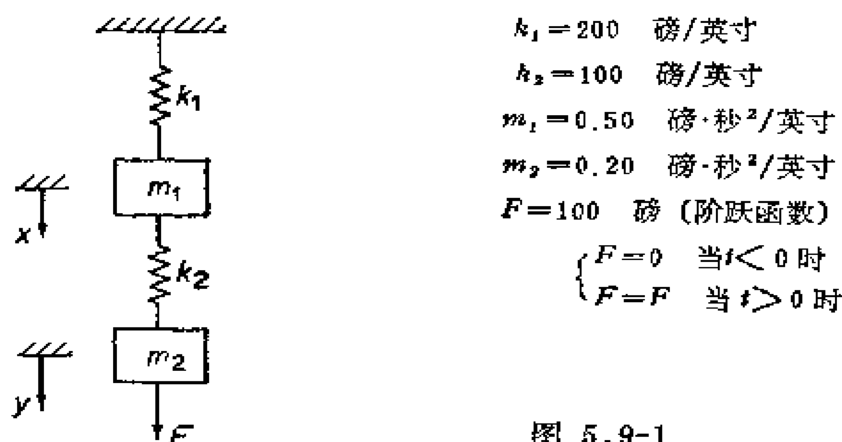


图 5.9-1

初始条件：

$$x = \dot{x} = y = \dot{y} = F = 0$$

以后x、y的注脚表示计算的顺序。

运动方程是：

$$0.50\ddot{x} = -200x + 100(y - x)$$

$$0.20\ddot{y} = -100(y - x) + 100$$

它们可改写为：

$$\ddot{x} = -600x + 200y$$

$$\ddot{y} = 500(x - y + 1)$$

这些方程要和4.7节所述的递归公式一起解：

$$x_{i+1} = \ddot{x}_i \Delta t^2 + 2x_i - x_{i-1}$$

$$y_{i+1}=\ddot{y}_i\Delta t^2+2y_i-y_{i-1}$$

为了确定合理的Δt，我们注意：

$$\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=20,\qquad \tau_1=0.314$$

$$\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}=22.4,\qquad \tau_2=0.280$$

因此任意选择$\Delta t=0.020$秒，同时注意开始值加速度$\ddot{x}_1=0$，$\ddot{y}_1=500$，这要求我们对y使用等式（4.7-4），对x使用等式（4.7-6）。取$\ddot{y}_1=500$，我们有：

$$y_2=\frac{1}{2}(500)(0.020)^2=0.10$$

求x_2及$\ddot{x}_2$值必须同时解下列方程

$$x_2=\frac{1}{6}\ddot{x}_2\Delta t^2$$

$$\ddot{x}_2=-600x_2+200y_2$$

以第二式代入第一式，消去$\ddot{x}_2$得：

$$x_2=\frac{33.33y_2\Delta t^2}{1+100\Delta t^2}$$

计算流程示于图5.9-2。FORTRAN 程序表示在图5.9-3。计算结果以及x、y的图示见图5.9-4。

```
ISN 0002      DIMENSION X(40), Y(40), DX2(40),
                DY2(40), T(40), J(40)
ISN 0003      J(1) = 1
ISN 0004      DT = 0.02
ISN 0005      DT2 = DT**2
ISN 0006      DX2(1) = 0.0
ISN 0007      DY2(1) = 500
ISN 0008      X(1) = 0.0
ISN 0009      Y(1) = 0.0
ISN 0010      T(1) = 0.0
ISN 0011      D0 100 I = 2,40
```

```
ISN  0012        J(I) =I
ISN  0013        T(I) =DT*(I-1)
ISN  0014        IF(1.GT.2)GO TO 200
ISN  0016        Y(1) =DY2(I-1)*DT2/2
ISN  0017        X(I) =33.33*Y(I)*DT2/(1+100*DT2)
ISN  0018        DY2(I) =500*(X(I) - Y(I) + 1)
ISN  0019        DX2(I) = -600*X(I) +200*Y(I)
ISN  0020        GO TO 100
ISN  0021   200  Y(I) =DY2(I-1)*DT2+2*Y(I-1) - Y(I-2)
ISN  0022        X(I) =DX2(I-1)*DT2+2*X(I-1) -X(I-2)
ISN  0023        DY2(I) =500*(X(I) - Y(I) + 1)
ISN  0024        DX2(I) = -600*(I) + 200*Y(I)
ISN  0025   100  CONTINUE
ISN  0026        WRITE(6,300)
ISN  0027   300  FORMAT(50H1 J TIME DISP X DISP-Y
                   ACC-X ACC-Y)
ISN  0028        WRITE(6,400)(J(I), T(I), X(I), Y(I),
                   DX2(I), DY2(I), I=1,40)
ISN  0029   400  FORMAT(1X, I2, 3X, F7.4, 3X, F6.4,
                   3X, F7.4, 3X, F9.2, 3X, F9.2)
ISN  0030        STOP
ISN  0031        END
```

图 5.9-3 计算用的Fortran程序

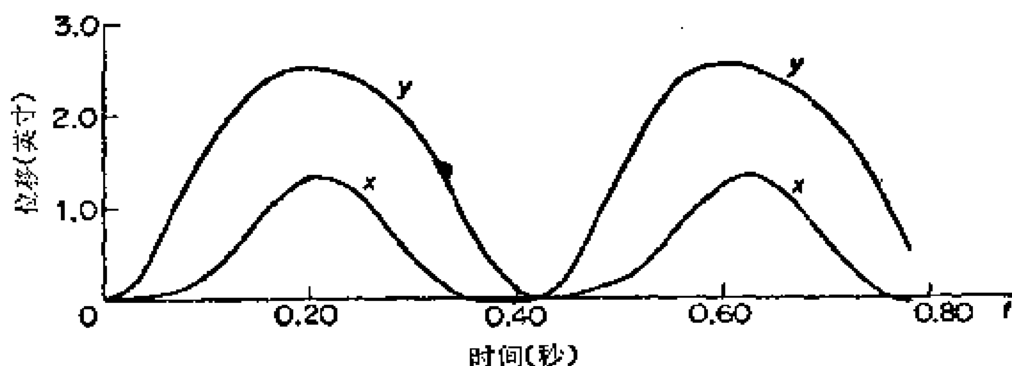


图 5.9-4

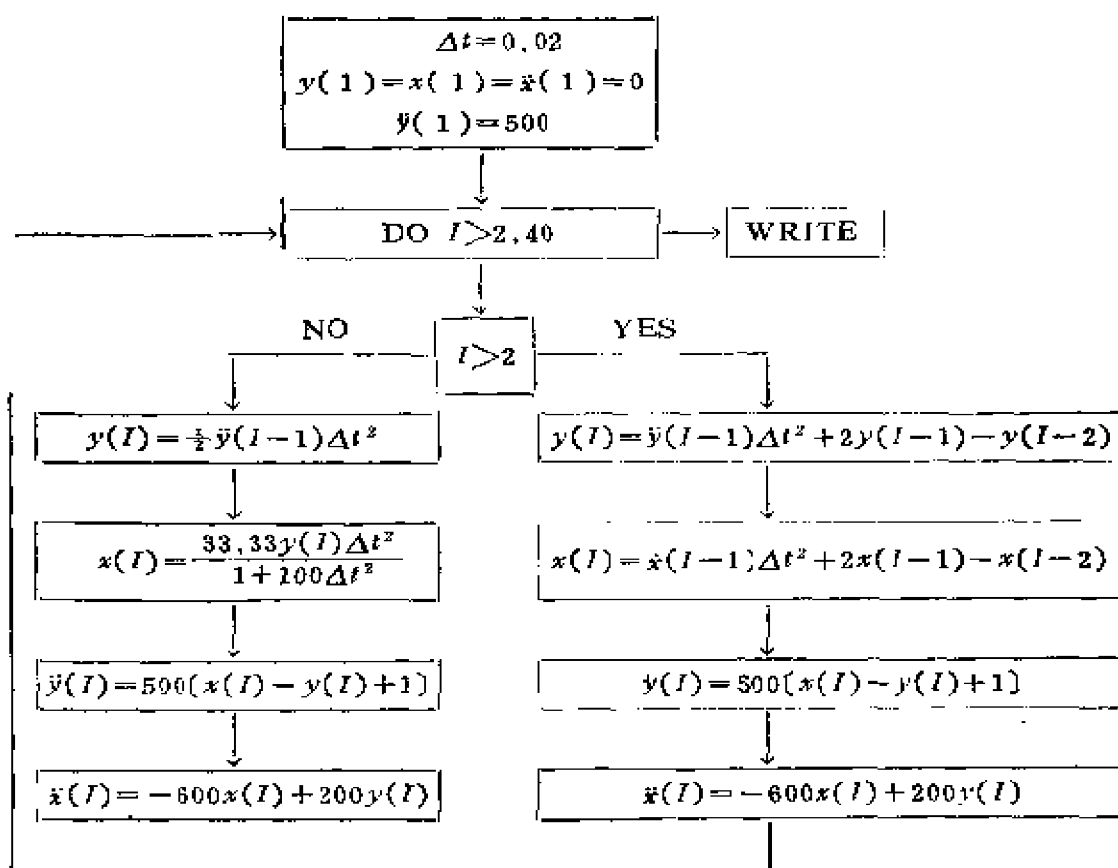


图 5.9-2

表 5.9-1

J	TIME	DISP-x	DISP-y	ACC-x	ACC-y
1	0.0	0.0	0.0	0.0	500.00
2	0.0200	0.0013	0.1000	19.23	450.64
3	0.0400	0.0103	0.3803	69.90	315.00
4	0.0600	0.0472	0.7865	128.99	130.34
5	0.0800	0.1357	1.2449	167.55	− 54.59
6	0.1000	0.2913	1.6815	161.53	−195.09
7	0.1200	0.5114	2.0400	101.14	−264.27
8	0.1400	0.7720	2.2928	−4.67	−260.37
9	0.1600	1.0308	2.4414	−130.19	−205.32
10	0.1800	1.2375	2.5080	−240.88	−135.25
11	0.2000	1.3478	2.5204	−304.59	− 86.31
12	0.2200	1.3363	2.4983	−302.10	− 81.02
13	0.2400	1.2039	2.4438	−233.58	−119.95

续表

J	TIME	DISP-x	DISP-y	ACC-x	ACC-y
14	0.2600	0.9781	2.3413	−118.61	−181.60
15	0.2800	0.7049	2.1662	10.31	−230.65
16	0.3000	0.4358	1.8988	118.30	−231.52
17	0.3200	0.2140	1.5388	179.37	−162.42
18	0.3400	0.0639	1.1139	184.41	− 24.96
19	0.3600	−.0123	0.6789	143.18	154.37
20	0.3800	−.0313	0.3057	79.95	351.47
21	0.4000	−.0184	0.0651	24.04	458.26
22	0.4200	0.0042	0.0078	−0.97	498.20
23	0.4400	0.0264	0.1498	14.10	438.32
24	0.4600	0.0543	0.4671	60.86	293.59
25	0.4800	0.1065	0.9018	116.49	102.31
26	0.5000	0.2052	1.3775	152.36	− 86.13
27	0.5200	0.3650	1.8187	144.76	−226.87
28	0.5400	0.5826	2.1692	84.28	−293.29
29	0.5600	0.8339	2.4023	−19.90	−284.19
30	0.5800	1.0773	2.5218	−142.03	−222.24
31	0.6000	1.2639	2.5524	−247.86	−144.24
32	0.6200	1.3513	2.5252	−305.73	− 86.97
33	0.6400	1.3164	2.4633	−297.19	− 73.45
34	0.6600	1.1627	2.3720	−223.20	−104.68
35	0.6800	0.9196	2.2389	−104.01	−159.61
36	0.7000	0.6350	2.0419	27.37	−203.43
37	0.7200	0.3613	1.7635	135.90	−201.08
38	0.7400	0.1420	1.4047	195.74	−131.34
39	0.7600	0.0010	0.9833	198.09	3.82
40	0.7800	−.0608	0.5835	153.20	177.83

习　　题

5-1　写出图 P.5-1系统的运动方程，求固有频率及振型形状。

5-2　求图 P.5-2系统的主振型和频率，$n=1$。

5-3　根据题5-2的系统，求固有频率与n的关系函数。

5-4　求图 P.5-4系统的固有频率和振型形状。

5-5　求图 P.5-5所示的扭转系统在 $K_1=K_2$，$J_1=2J_2$ 下的主振型。

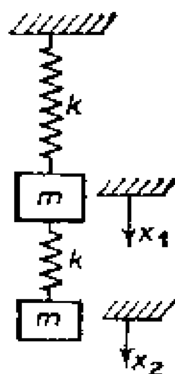


图 P.5-1

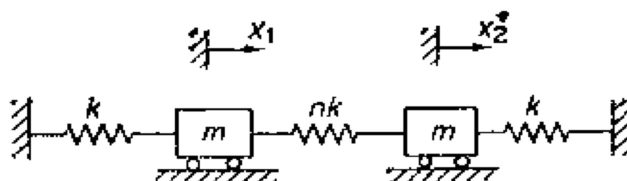


图 P.5-2

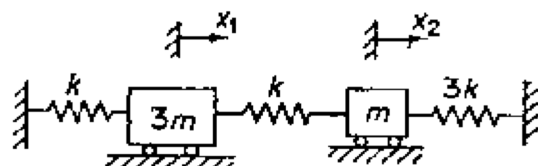


图 P.5-4

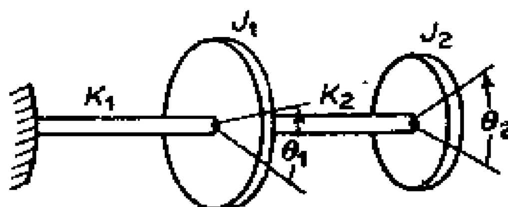


图 P.5-5

5-6 如果题5-5扭转系统中$K_1=0$，则系统变为只有一个固有频率的简化二自由度系统。讨论这一系统的主振型以及和它等效的线性弹簧-质量系统。证明这个系统可用坐标$\phi=\theta_1-\theta_2$，把它作为单自由度来处理。

5-7 求图P.5-7所示扭转系统的固有频率并画出主振型曲线。

5-8 一电车由重为50,000磅的两个车厢用刚度为16,000磅/英寸的连结器联系，求系统的固有频率。

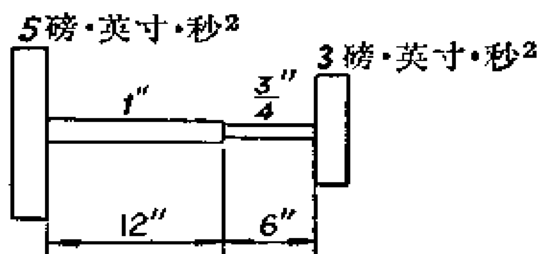


图 P.5-7

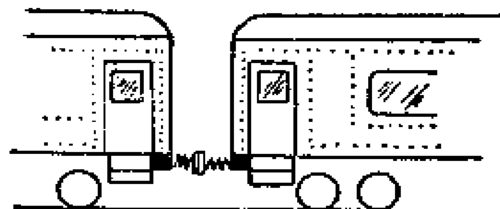


图 P.5-8

5-9 按图P.5-9所标坐标的复摆，假定是小摆角，证明系统的固有频率由下式给出：

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}(2\pm\sqrt{2})}$$

并求出振幅比x_1/x_2，指出二个振型的节点。

5-10 把双摆的运动方程表为由铅垂线计算的角度θ_1、θ_2的函数。

5-11 两质量m_1和m_2被连在张力为T的弦上，如图P.5-11假定质量在垂直于弦的方向位移时张力T不变，请写出矩阵形式的运动方程式。

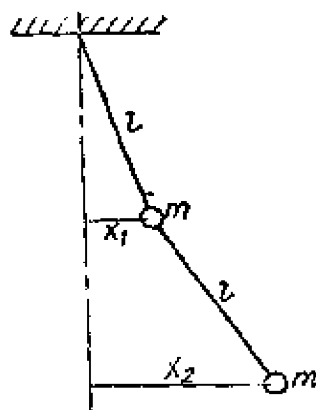


图 P.5-9

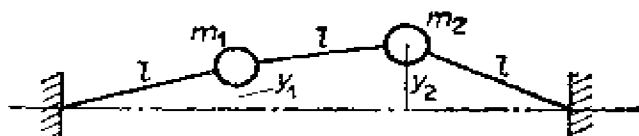


图 P.5-11

5-12 在题5-11中如果两个质量相等，证明基本振型的频率是：

$$\omega_1=\sqrt{T/ml},\qquad \omega_2=\sqrt{3T/ml},$$

请指出这些主振型的形状。

5-13 在题5-11中如果$m_1=2m$，$m_2=m$，求主振型的频率和振型形状。

5-14 图P.5-14所示的扭转系统由下列部分组成：刚度为K_1的轴，半径为r、惯性矩为J_1的轮毂，刚度为K_2的四片弹簧，半径为R、惯性矩为J_2的外轮缘。假定轴的一端固定，请提出扭转振荡的运动微分方程，证明频率方程简化为

$$\omega^4-\left(\omega_{11}^2+\omega_{22}^2+\frac{J_2}{J_1}\omega_{22}^2\right)\omega^2+\omega_{11}^2\omega_{22}^2=0$$

式中ω_{11}和ω_{22}是所谓解耦频率，它由下式给出：

$$\omega_{11}^2=\frac{K_1}{J_1}$$

$$\omega_{22}^2=\frac{4k_2R^2}{J_2}$$

5-15 两个相等摆绕轴 x-x 自由转动，彼此间用刚度为 k（磅·英寸/弧度）

的橡皮管相连，如图P.5-15，求主振型的固有频率并说明运动可能如何开始。

如$l=19.3$英寸，$mg=3.86$磅，$k=2.0$磅·英寸/弧度，求运动从$\theta_1=0$，$\theta_2=\theta_0$开始的差拍周期，并仔细考察当振幅趋近于零时运动的相位关系。

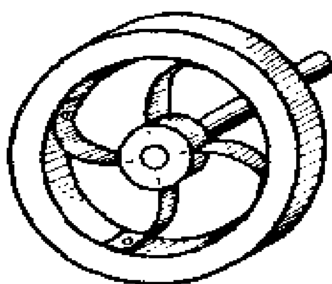


图 P.5-14

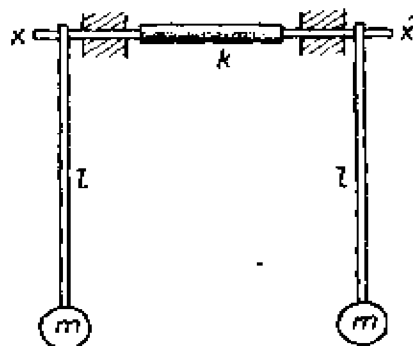


图 P.5-15

5-16 求题5-4系统在下列起始条件下的运动方程：$x_1(0)=A, \dot{x}_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$。

5-17 题5-9的双摆是从下列起始条件下开始起动：$x_1(0)=x_2(0)=X$，$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$，求运动方程。

5-18 题5-1系统的下面质量给予突然冲击，使它具有初速度$\dot{x}_2(0)=V$，求方程。

5-19 如果题5-1系统是由下列起始条件开始起动：$x_1(0)=0, x_2(0)=1.0$，$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$，证明它们的运动方程是：

$$x_1(t)=0.447\cos\omega_1 t-0.447\cos\omega_2 t$$

$$x_2(t)=0.722\cos\omega_1 t+0.278\cos\omega_2 t$$

$$\omega_1=\sqrt{0.382k/m}, \quad \omega_2=\sqrt{2.618k/m}$$

5-20 选择图P.5-20的均匀杆的c点的坐标及杆顺时针转角θ，求其固有频率及振型形状。

5-21 根据图P.5-21的系统，选择m和$2m$处的坐标为x_1和x_2，提出矩阵形式的运动方程。求主振型频率和主振型形状。

5-22 如果在题5-21中，坐标选择m点为x，转角为θ，将形成怎样的耦合方式？

5-23 比较题5-9和5-10的矩阵形式，指出每一种坐标系统存在的耦合

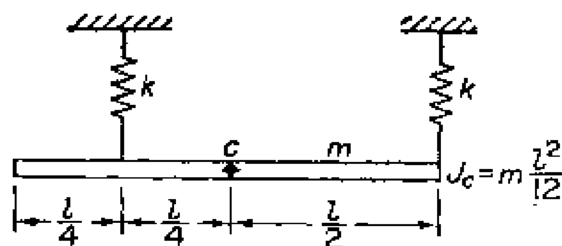


图 P.5-20

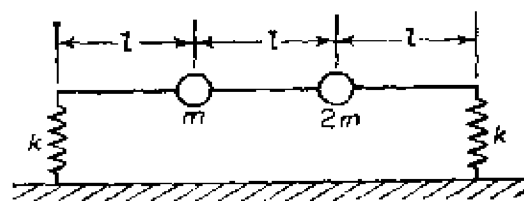


图 P.5-21

形式。

5-24 图P.5-24表示的某汽车，给定下列参数：

$W=3500$磅　　$k_1=2000$磅/英尺

$l_1=4.4$英尺　　$k_2=2400$磅/英尺

$l_2=5.6$英尺　　$r=4$英尺＝对c点的旋转半径

求主振型并指出每一振型的节点。

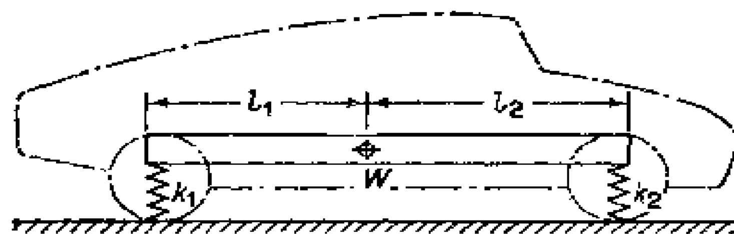


图 P.5-24

5-25 一个飞机机翼在风洞中试验，支持在直线弹簧k和扭转弹簧K上，如图P.5-25。如果断面重心在靠头部离支承点距离为c，求此系统的运动微分方程。

5-26 求图P.5-26系统的固有频率和主振型，系统参数为：

$m_1g=3.86$磅　　$k_1=20$磅/英寸

$m_2g=1.93$磅　　$k_2=10$磅/英寸

当$F_1=F_0\sin\omega t$时，求振幅方程并画成与ω/ω_{11}的关系曲线。

5-27 一个转子安装在支承上，它可在一个平面内自由转动，如图P.5-27。转子相对O点对称，具有总质量M和相对于垂直于轴的中心线的总惯矩J_0。如果在离O点为b处有一小的失衡mr，求转速为ω时的运动方程。

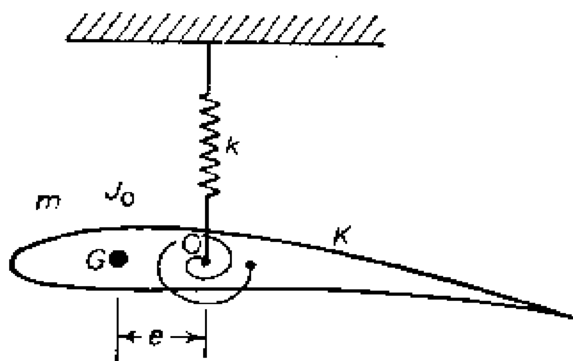


图 P.5-25

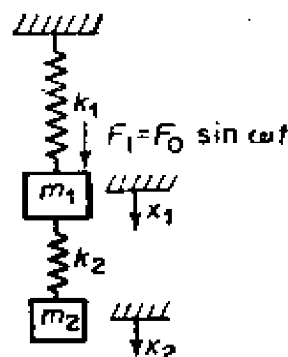


图 P.5-26

5-28 一个两层建筑如图P.5-28所示，是一集中质量系统，这里

$$m_1=\frac{1}{2}m_2,\quad k_1=\frac{1}{2}k_2,$$

请证明它的主振型是：

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{(1)}=2 \qquad \omega_1^2=\frac{1}{2}\frac{k_1}{m_1}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{(2)}=-1 \qquad \omega_2^2=2\frac{k_1}{m_1}$$

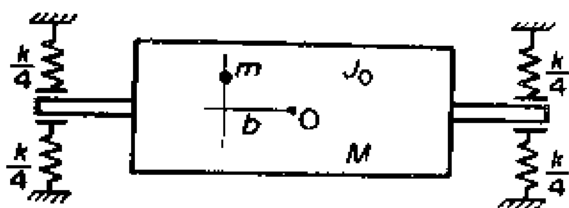


图 P.5-27

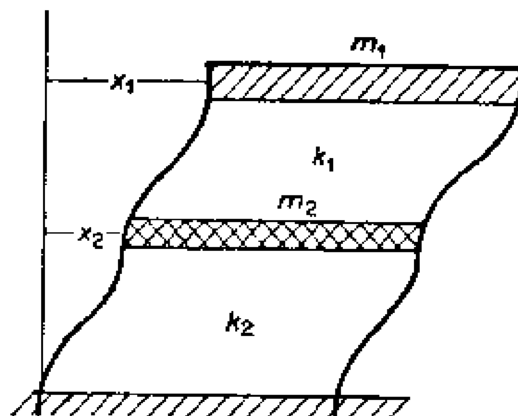


图 P.5-28

5-29 在题5-28中，如果在m_1处施加一产生单位挠度的力，然后系统被释放，请用主振型总和法求每一质量的运动方程。

5-30 求题5-29中第一、二层剪切变形的比值。

5-31 再做题5-29，但作用力加于m_2并使其产生单位变形。

5-32 假定在题5-28中由于地震地壳在水平方向振荡，其相应的方程为 $x_g = X_g \sin\omega t$，求建筑的响应并绘出对ω/ω_1的关系。

5-33 为模拟地震对刚性建筑物的作用，假定基础由两个弹簧与地面联系：K_h是水平方向的刚度，K_r是旋转刚度。如果地面给予的是简谐运动：$Y_g = Y_G \sin\omega t$，请提出按图P.5-33所给定的坐标的运动方程。

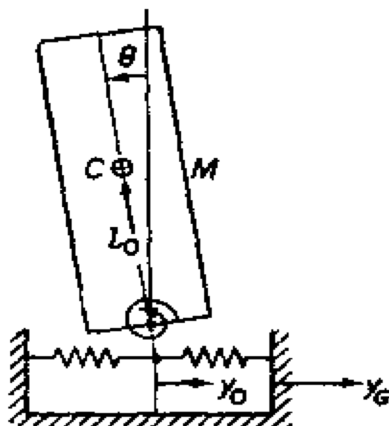


图 P.5-33

5-34 解题5-33，令：

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{M}, \quad \left(\frac{\rho_c}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M\rho_c^2}, \quad \left(\frac{\omega_r}{\omega_h}\right)^2 = 4$$

第一个固有频率和振型形状是：

$$\frac{\omega_1}{\omega_h} = 0.734, \quad \frac{Y_0}{l_0\theta} = -1.14$$

这说明对运动起主导作用的是平移。请提出第二固有频率及其振型形状（$Y_1 = Y_0 - 2l_0\theta_0$是顶部位移）。

5-35 题5-33和5-34的响应和振型形状表示于图P.5-35。请考察在不同频率比下振型的形式。

5-36 混凝土公路的膨胀点是相隔45英尺一个。这些点对以不变速度运行的汽车产生一系列等间隔的冲击。问：对题5-24所示的汽车，在何种运行速度下最易产生颠簸和上下运动？

5-37 对于图P.5-37的系统，$W_1 = 200$磅，吸振器的重量$W_2 = 50$磅。如W_1被一个2磅·英寸的以1800转/分旋转的失衡质量所激励，求吸振

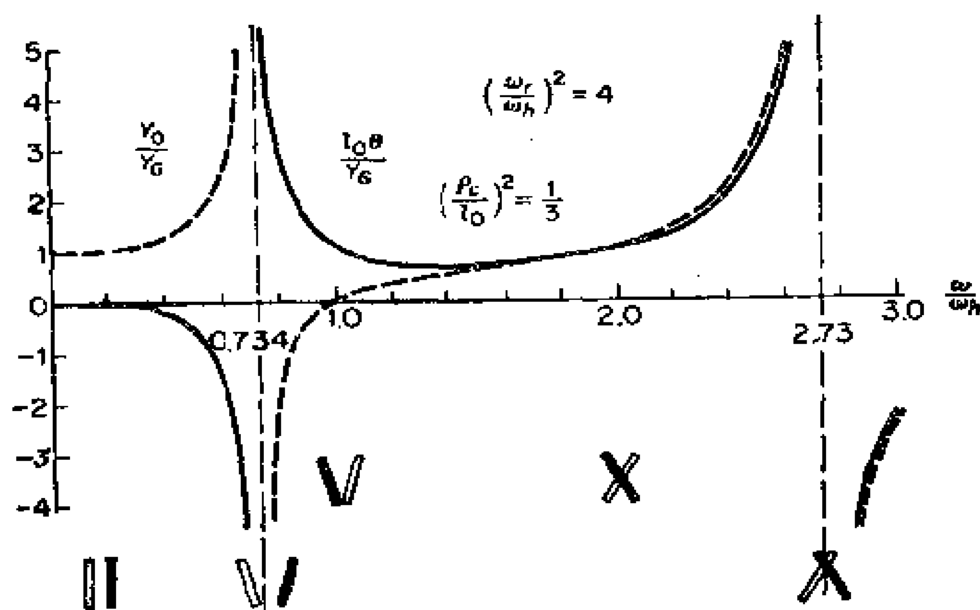


图 P.5-35

器弹簧k_2的合适值：W_2的振幅将是多少？

5-38 如果在题5-37中，于W_1和W_2之间接入一阻尼器 c，请用复数代数学的方法求振幅方程。

5-39 一惯性矩为I的飞轮带有惯性矩为 I_d 的吸振器，吸振器可自由地在轴上旋转并用四只刚度为k（磅/英寸）的弹簧与飞轮连系，如图P.5-39。请提出系统的运动微分方程并讨论系统扭振的响应。

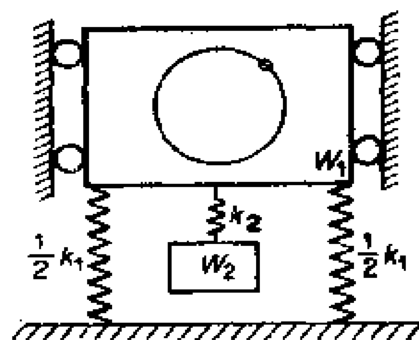


图 P.5-37

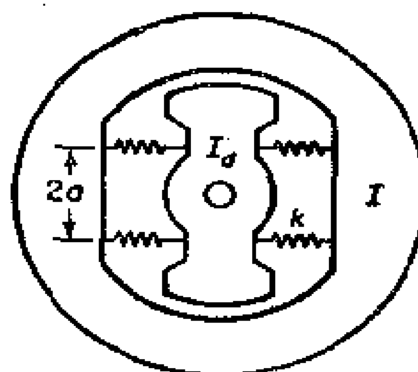


图 P.5-39

5-40 图P.5-40所示的双点支承摆是作为离心摆应用于限制扭转振动的。U字形重块很松动地在直径为d_2的销轴上转动，它的轴承孔直径等于d_1。

配重相对于曲柄作曲线平移运动，而它的每一点作半径为$r=d_1-d_2$的圆弧运动。请证明U字形重块的实际运动是$r=d_1-d_2$的圆弧运动。

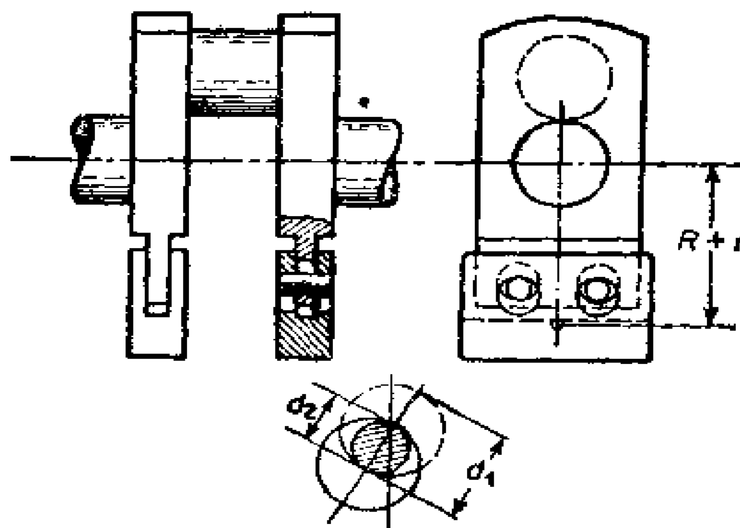


图 P.5-40

5-41 一双摆式离心摆用来限制频率等于四倍转速的扭转振动。如果到摆质量重心的距离R等于4.0英寸时，$d_1=\frac{3}{4}$英寸，问：销子直径d_2应是多少？

5-42 一个筛煤的筛选机有一个筛网，它以600周/分往复运动。筛选机重500磅，基本频率为400 cpm。如装一重125磅的吸振器以限制筛选机架的振动，求吸振器的弹簧刚度及系统产生的两个固有频率。

5-43 某冷冻厂运送冷冻剂的管道的一部分在空压机速度为232转/分时发生强烈振动。为了解决这个困难，曾提出在管道上固定一弹簧-质量系统作为吸振器。为了试验2.0磅的吸振器谐振于232周/分，曾产生了二个固有频率198和272周/分。如果吸振器系统设计成固有频率处于160～320周/分之外，则质量和弹簧刚度应多少？

5-44 一种经常在汽车曲轴上使用的阻尼器表示于图P.5-44。J表示一个可以在轴上自由转动的固体圆盘，盘和壳间的空间充满硅油，它的粘性摩擦系数为μ。阻尼作用发生在两者之间任何相对运动。请推导由于相对速度ω引起的圆盘作用在壳体的阻尼扭矩方程。

5-45 求质量比$\mu=0.25$的霍戴尔粘性阻尼器的最佳阻尼ζ_0和最有效的作用频率。

5-46 如果题5-45的粘性阻尼器$\zeta=1.0$，求尖峰振幅（与最优时比较值）。

5-47 确立5.7节公式（5.7-7）和（5.7-8）的关系。

5-48 有一长度为l、刚度为EI的简支梁，在$\frac{l}{3}$处固定一很薄刚盘，如图P.5-48，请建立y和θ的运动方程并画$(\omega/\omega_y)^2$与J_d/ml^2的关系曲线。

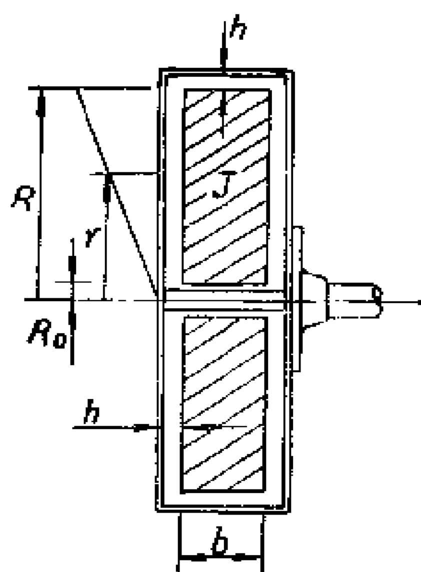


图 P.5-44

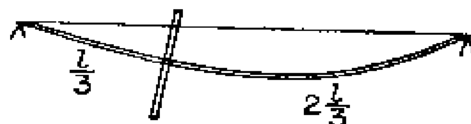


图 P.5-48

5-49 题5-4的系统，质量$3m$受到高100磅，宽为$6\pi\sqrt{m/k}$秒的矩形脉冲激励，请画一个求系统响应的计算机计算流程图并提出FORTRAN程序。

5-50 对题5-28假定下列参数：$k_1=4\times10^3$磅/英寸，$k_2=6\times10^3$磅/英寸，$m_1=m_2=100$。设地面有$y=10''\sin\pi t$、时间为4秒的激励，请画出求响应的计算机计算流程图和FORTRAN程序。

第六章 多自由度系统

6.1 导引

几个自由度的动力系统的分析由于有大量方程式和许多详细的计算，而变得复杂化了。因此，希望有一个处理这一问题的简明方法，能清楚地导出预想的结果而不纠缠中间细节。矩阵方法是一种很适合这种目的的手段，它可把大量的方程组巧妙地处理成简略符号。大容量的计算通常需要由数字计算机来承担，没有它这些问题将变成不可思议。

本章我们将讨论应用于多自由度动力系统振动的各种矩阵方法。首先讨论构成运动方程式的一些基本概念的实质，同时以振动理论为基础的各种概念用矩阵符号来叙述。这些概念构成了处理和理解多自由度系统特性的基础。

6.2 柔度矩阵和刚度矩阵

柔度影响系数 a_{ij} 定义为由于在 j 处加上一个单位力而在 i 处引起的位移。作用在位置1，2，及 3 的力f_1，f_2，f_3应用迭加原理，以柔度影响系数来表示位移

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + a_{13}f_3 \\
x_2 &= a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + a_{23}f_3 \\
x_3 &= a_{31}f_1 + a_{32}f_2 + a_{33}f_3
\end{aligned}
\tag{6.2-1}
$$

用矩阵符号，方程式则为

$$\{x\} = [a]\{f\} \tag{6.2-2}$$

式中

$$[a]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (6.2\text{-}3)$$

即为柔度矩阵。

如果方程式（6.2-2）左乘以柔度矩阵的逆阵$[a]^{-1}$，得到方程式

$$[a]^{-1}\{x\}=\{f\}=[k]\{x\} \qquad (6.2\text{-}4)$$

由此我们找到柔度矩阵的逆阵就是刚度矩阵$[k]$

$$[a]^{-1}=[k]$$

或

$$[a]=[k]^{-1} \qquad (6.2\text{-}5)$$

写出方程式（6.2-4）各项，则有

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad (6.2\text{-}6)$$

刚度矩阵各元素有下列说明。假如$x_1=1.0$，$x_2=x_3=0$，按照方程式（6.2-6）为了保持这项位移，在位置1、2、3处所需要的力是k_{11}，k_{21}及k_{31}。同样地，为保持位移形状$x_1=0$，$x_2=1.0$，$x_3=0$所需要的力是k_{12}，k_{22}，k_{32}。因此确定刚度矩阵任一列元素的一般规则是，使与该列数相同的位置的变位等于1，其它变位等于零，量度出每个位置所需要的力便是该列的元素。

例 6.2-1

求出图6.2-1所示均匀的悬臂梁（1），（2），（3）点的影响系数。

解：求影响系数可以在（1），（2），（3）处施加单位载荷，并计算这些点的位移。利用面矩法❶，各个点上的位移等于M/EI曲线面积对所求点的力矩。例如，$a_{21}=a_{12}$的值可根据图6.2-1(*b*)求得

---

❶ Egor P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1968), p.411.

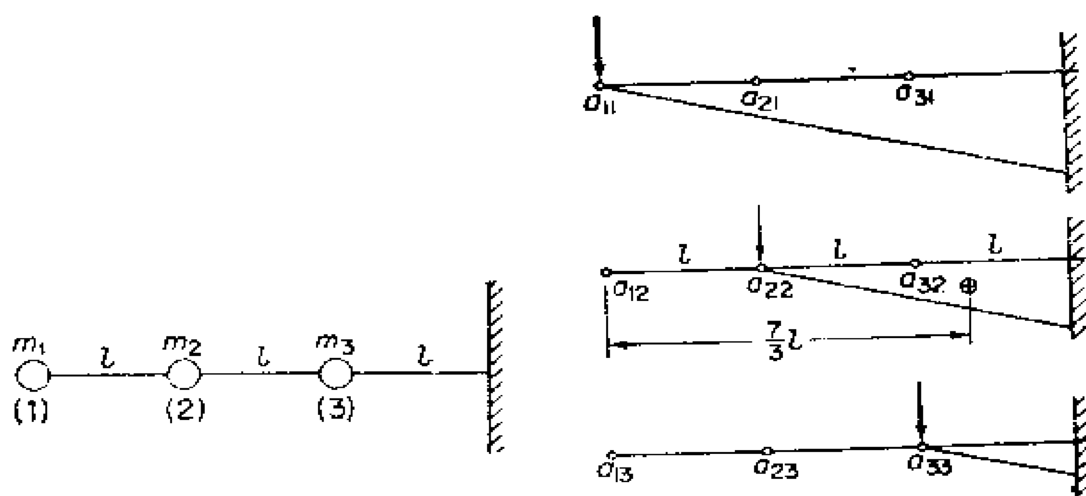


图 6.2-1

$$a_{12}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot(2l)^2\times\frac{7}{3}\cdot l\right)=\frac{14}{3}\frac{l^3}{EI}$$

其它值（同上述确定方法）为

$$a_{11}=\frac{27}{3}\frac{l^3}{EI}\qquad a_{21}=a_{12}=\frac{14}{3}\frac{l^3}{EI}$$

$$a_{22}=\frac{8}{3}\frac{l^3}{EI}\qquad a_{23}=a_{32}=\frac{2.5}{3}\frac{l^3}{EI}$$

$$a_{33}=\frac{1}{3}\frac{l^3}{EI}\qquad a_{13}=a_{31}=\frac{4}{3}\frac{l^3}{EI}$$

柔度矩阵现在可写成

$$a=\frac{l^3}{3EI}\begin{pmatrix}27 & 14 & 4\\ 14 & 8 & 2.5\\ 4 & 2.5 & 1\end{pmatrix}$$

应该指出它对称于主对角线。

例 6.2-2

图6.2-2为一个三自由度系统。求刚度矩阵。

解： 令$x_1=1.0$，$x_2=x_3=0$，设力指向右面为正，则位置1,2,3 所需要的力为

$$f_1=k_1+k_2=k_{11}$$

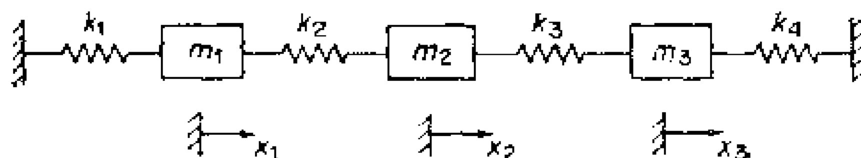


图 6.2-2

$$f_2 = -k_2 = k_{21}$$

$$f_3 = 0 = k_{31}$$

依次$x_2 = 1$，$x_1 = x_3 = 0$。此时力为

$$f_1 = -k_2 = k_{12}$$

$$f_2 = k_2 + k_3 = k_{22}$$

$$f_3 = -k_3 = k_{32}$$

k的最后一列，令$x_3 = 1$，$x_1 = x_2 = 0$。力系为

$$f_1 = 0 = k_{13}$$

$$f_2 = -k_3 = k_{23}$$

$$f_3 = k_3 + k_4 = k_{33}$$

刚度矩阵可写为

$$k = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{bmatrix}$$

6.3 互等定理

互等定理规定，在一个线性系统里 $a_{ij} = a_{ji}$。为了证明这个定理，我们考虑力f_i及f_j所作的功，其加载次序是先i后j，然后反之。只要我们承认所做的功与加载顺序无关，互等就成立。

加载f_i，所做的功为$\frac{1}{2}f_i^2 a_{ii}$。加载f_j，由f_j所做的功为$\frac{1}{2}f_j^2 a_{jj}$。而i处继续产生位移$a_{ij}f_j$，因此由f_i引起的附加功为$a_{ij}f_j f_i$。这样所做的总功是

$$W = \frac{1}{2} f_i^2 a_{ii} + \frac{1}{2} f_j^2 a_{jj} + a_{ij} f_j f_i \qquad (6.3\text{-}1)$$

现在颠倒加载的顺序，这时所做的总功是

$$W = \frac{1}{2} f_j^2 a_{jj} + \frac{1}{2} f_i^2 a_{ii} + a_{ji} f_i f_j \qquad (6.3\text{-}2)$$

因为两种情况所做的功必须相等，故得

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (6.3\text{-}3)$$

6.4 特征值和特征向量

几个自由度的无阻尼自由振动系统，运动方程式用矩阵形式表达为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \qquad (6.4\text{-}1)$$

式中

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} m_{12} \cdots m_{1n} \\ \vdots \\ m_{n1} m_{n2} \cdots m_{nn} \end{bmatrix} = \text{质量矩阵（方阵）}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} k_{12} \cdots k_{1n} \\ \vdots \\ k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nn} \end{bmatrix} = \text{刚度矩阵（方阵）}$$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \text{位移向量(列阵)}$$

当没有二义性时，我们将省去方括号和花括号，用大写字母简写出矩阵方程式如

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

如果对上面方程式左乘以M^{-1}，我们得出下面几项

$$M^{-1}M = I \quad \text{（单位矩阵）}$$

$$M^{-1}K = A \quad \text{（动力矩阵）}$$

$$I\ddot{X} + AX = 0 \qquad (6.4\text{-}2)$$

假设为谐运动 $\ddot{X}=-\lambda X$，这里 $\lambda=\omega^2$，则方程式（6.4-2）变成

$$[A-\lambda I]\{X\}=0 \qquad (6.4-3)$$

从方程式（6.4-3）我们构成行列式

$$|A-\lambda I|=0 \qquad (6.4-4)$$

也就是系统的特征方程式。特征方程的根 λ_i 称为特征值，系统的固有频率是由这些特征值根据下列关系求得

$$\lambda_i=\omega_i^2 \qquad (6.4-5)$$

把 λ_i 代入矩阵方程式(6.4-3)，我们就得到相对应的振型形状 X_i，称为特征向量。n 个自由度将有 n 个特征值和 n 个特征向量。

从系统的伴随矩阵（参看附录C）亦可以找到特征向量。为简明起见，我们简写成 $B=A-\lambda I$，并首先定义逆阵

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}adj\,B \qquad (6.4-6)$$

左乘以 $|B|\ B$ 可得

$$|B|\,I=B\,adj B$$

或依据 B 的原来表达式

$$|A-\lambda I|\,I=[A-\lambda I]adj[A-\lambda I] \qquad (6.4-7)$$

假如我们令特征值 $\lambda=\lambda_i$，然后又使方程式左边的行列式为零，于是得出

$$[0]=[A-\lambda_i I]adj[A-\lambda_i I] \qquad (6.4-8)$$

上述方程式对所有的 λ_i 都有效，并有 n 个方程式表示 n 个自由度系统。与方程式（6.4-3）的第 i 型

$$[A-\lambda_i I]\{X\}_i=0$$

相比较，我们认为伴随矩阵 $adj[A-\lambda_i I]$ 必须由若干列组成，它的每一列就是特征向量 X_i（乘以一任意常数）。

例 6.4-1

考虑图6.4-1的系统。

它的运动方程式能够用矩阵符号表达为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (a)$$

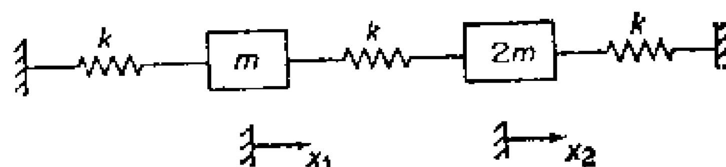


图 6.4-1

左乘质量矩阵的逆阵

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{m} & 0\\ 0 & \frac{1}{2m}\end{bmatrix}$$

并令$\lambda=\omega^2$，方程(a)变成

$$\begin{bmatrix}\left(2\frac{k}{m}-\lambda\right) & -\frac{k}{m}\\ -\frac{1}{2}\frac{k}{m} & \left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=0 \qquad (b)$$

从上列矩阵的行列式，得到特征方程式为

$$\lambda^2-3\frac{k}{m}\lambda+\frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2=0 \qquad (c)$$

由此解得特征值

$$\lambda_1=0.634\frac{k}{m}$$
$$\lambda_2=2.366\frac{k}{m} \qquad (d)$$

把上面的λ值代入方程(b)能找出特征向量。但我们将说明伴随矩阵在计算中的用法。

从方程(b)得伴随矩阵

$$adj[A-\lambda_i I]=\begin{bmatrix}\left(\frac{k}{m}-\lambda_i\right) & \frac{k}{m}\\ \frac{k}{2m} & \left(\frac{2k}{m}-\lambda_i\right)\end{bmatrix} \qquad (e)$$

代入以$\lambda_1 = 0.634k/m$，我们从方程（e）得到

$$\begin{bmatrix} 0.366 & 1.000 \\ 0.500 & 1.366 \end{bmatrix} \frac{k}{m}$$

把每个列归一化到单位值 1，便得第一特征向量

$$\begin{bmatrix} 0.732 & 0.732 \\ 1.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad 或 \quad X_1 = \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

同样，当$\lambda_2 = 2.366k/m$，第二个特征向量可从方程（e）的任一列得到

$$X_2 = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

该两个基本节点如图6.4-2所示。

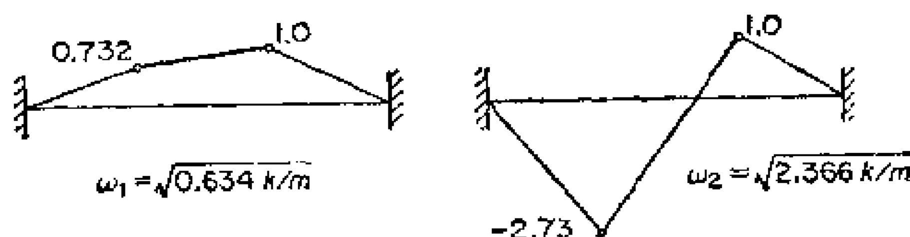


图 6.4-2

6.5 特征向量的正交性

系统的主振型或特征向量能用与质量和刚度矩阵有关的**正交性**说明如下。令第 i 个振型方程

$$KX_i = \lambda_i MX_i \tag{6.5-1}$$

左乘第 j 振型的转置阵

$$X'_j KX_i = \lambda_i (X'_j MX_i) \tag{6.5-2}$$

其次，对第 j 型方程左乘X'_i得到

$$X'_i KX_j = \lambda_j (X'_i MX_j) \tag{6.5-3}$$

由于K和M都是对称矩阵，有下列关系●

● 参看附录C。

$$X'_j M X_i = X'_i M X_j$$
$$X'_j K X_i = X'_i K X_j \tag{6.5-4}$$

方程(6.5-2)减去方程(6.5-3)，可得

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) X'_i M X_j \tag{6.5-5}$$

如果$\lambda_i \neq \lambda_j$，上面方程式要求

$$X'_i M X_j = 0 \tag{6.5-6}$$

从方程 (6.5-2) 或方程(6.5-3)很明显可得到与方程(6.5-6)相似的结果

$$X'_i K X_j = 0 \tag{6.5-7}$$

方程(6.5-6)及(6.5-7)定义为主振型的正交特性。

最后，如果 $i = j$，由方程 (6.5-6) 或 (6.5-7) 给出的任何值，都可以使方程(6.5-5)得到满足，因此我们令

$$X'_i M X_i = M_i$$
$$X'_i K X_i = K_i \tag{6.5-8}$$

它们相应地称为广义质量和广义刚度。

6.6 重根

当特征方程中找到重根时，则相应的特征向量不是唯一的，这样的特征向量的线性组合都能满足运动方程。为说明这一点，令X_1和X_2为属于一个共同特征值 λ_0 的特征向量，X_3 是特征值为λ_3的第三个特征向量。我们能写出

$$AX_1 = \lambda_0 X_1$$
$$AX_2 = \lambda_0 X_2 \tag{6.6-1}$$
$$AX_3 = \lambda_3 X_3$$

第二方程乘上常数 b 并加到第一方程式，即得另一个方程式

$$A(X_1 + bX_2) = \lambda_0 (X_1 + bX_2) \tag{6.6-2}$$

这样，一个新的特征向量$X_{12} = X_1 + bX_2$，是 1 与 2 的线性组合，也能满足基本方程

$$AX_{12} = \lambda_0 X_{12} \tag{6.6-3}$$

因此对λ_0来说没有唯一的振型存在。

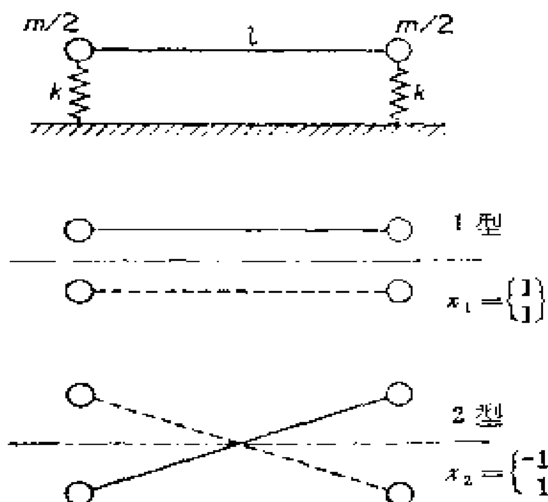


图 6.6-1

如果相应于λ_0的任何振型是主振型，它必须同X_3正交。倘若所有三个振型都是正交的，它们是线性无关。并且可以组合起来描述任何初始条件引起的自由振动。

例 6.6-1

图6.6-1所示系统，设系杆是刚性的，重量可忽略不计。两个振动的主振型如图所示是平动和转动，且它们是正交的。但两个振型的固有频率相等并能按下式计算

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

本例说明不同的特征向量可以有相同的特征值。

例 6.6-2

求当 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$时的特征值和特征向量。

解： 从特征方程式 $|A-\lambda I|=0$ 得出

$$(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$$

所以特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$。

构成伴随矩阵

$$adj[A-\lambda I]=\begin{pmatrix}(\lambda^2-1) & -(\lambda-1) & (\lambda-1)\\ -(\lambda-1) & (\lambda^2-1) & (\lambda-1)\\ (\lambda-1) & (\lambda-1) & (\lambda^2-1)\end{pmatrix}$$

对应于$\lambda_3=-2$的特征向量可从上述矩阵的任意列找到

$$\begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ 3 & 3 & -3\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix} \quad 或 \quad X_3=\begin{Bmatrix}-1\\-1\\1\end{Bmatrix}$$

以$\lambda_1=\lambda_2=1$代入伴随矩阵便得到全部元素为零．于是我们代回到$\lambda=1$时的原始矩阵方程$[A-\lambda I]X=0$

$$-x_1-x_2+x_3=0$$

$$-x_1-x_2+x_3=0$$

$$x_1+x_2-x_3=0$$

这些方程式的所有三项都形成

$$x_1=x_3-x_2$$

因此对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征值X_1能写成

$$X_1=\begin{Bmatrix} x_3-x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

可发现x_2及x_3的所有值正交于X_3，也就是说

$$(X_3)\{X_1\}=0$$

由此，对于$x_2=x_3=1$，第一个特征向量为

$$X_1=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$x_3=1$，$x_2=-1$，第二个特征向量是

$$X_2=\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

如以前的方程(6.6-2)所示，X_1及X_2不是唯一的，X_1和X_2的任何线性组合都将满足原始的矩阵方程。

6.7 振型矩阵 P

在第五章里我们找到决定于坐标选择的静力耦合或动力耦合，对于一个无阻尼系统存在着一组表示无耦合运动方程的基本坐标。由于每个方程式能够彼此独立地来解，所以这种非耦合型坐标是合乎需要的。

对于具有集中质量的多自由度系统，每个质点坐标的选择将

组成一对角线质量矩阵，而静力耦合的刚度矩阵将包含对角线之外的项。用其它方法选择坐标，可以得动力耦合或两种耦合都有。

倘若我们知道前面的系统的主振型，使得一个n个自由度系统的运动方程式非耦合化是完全可能的。当n个主振型（或特征值）汇集在一个方阵内，该方阵每一列代表着各个主振型，我们称此方阵为**振型矩阵**P。因此一个三自由度系统的振型矩阵可以表示为

$$P=\left[\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3\right]=[X_1 \quad X_2 \quad X_3] \tag{6.7-1}$$

振型矩阵有可能把第6.5节所有的正交关系包括在一个方程式内。为了这种运算，我们需要P的转置矩阵

$$P'=\begin{bmatrix} (x_1 & x_2 & x_3)_1 \\ (x_1 & x_2 & x_3)_2 \\ (x_1 & x_2 & x_3)_3 \end{bmatrix}=[X_1 \quad X_2 \quad X_3]' \tag{6.7-2}$$

它的每一行对应于一个振型。如果我们现在构造一下矩阵乘积$P'MP$或$P'KP$，由于它的非对角线项显示有正交关系取为零，结果将得到一对角矩阵。

以两个自由度系统为例，执行振型矩阵指定的运算，有

$$\begin{aligned} P'MP &= [X_1X_2]'[M][X_1X_2] \\ &= \begin{bmatrix} X'_1MX_1 & X'_1MX_2 \\ X'_2MX_1 & X'_2MX_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.7-3}$$

上式中，因为有正交性非对角线项为零，对角线项是广义质量M_i。

显然，类似的公式亦适用于刚度矩阵K，结果有下面方程式

$$P'KP=\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \tag{6.7-4}$$

这里对角线项为广义刚度K_i。

如果振型矩阵P的每一列除以广义质量M_i的平方根，得新

矩阵称之为加权振型矩阵记作$\widetilde{P}$。容易看出由加权振型矩阵使质量矩阵对角线化可得到单位矩阵

$$\widetilde{P}'M\widetilde{P} = I \tag{6.7-5}$$

由于$K_i/M_i = \lambda_i$，刚度矩阵同样地由加权振型矩阵处理后成为一个特征值的对角矩阵

$$\widetilde{P}'K\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda \tag{6.7-6}$$

例 6.7-1

图6.7-1示对称的二自由度系统。

图 6.7-1

以矩阵形式表示的运动方程式为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \tag{a}$$

特征值和特征向量等于

$$\lambda_1 = \omega_1{}^2 = \frac{k}{m}, \qquad \lambda_2 = \omega_2{}^2 = 3\frac{k}{m}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_2} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{b}$$

两个振型的广义质量是$2m$，振型矩阵和加权振型矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{c}$$

为了对原来的方程解耦，我们用$\widetilde{P}$作如下变换

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

左乘以$\widetilde{P}$可得

$$\widetilde{P}'M\widetilde{P}\,\ddot{y} + \widetilde{P}'K\widetilde{P}\,Y = 0$$

或者

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\end{Bmatrix}+\frac{k}{m}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}=0 \qquad (e)$$

由此方程式(a)用方程(d)的坐标转换，已转换成非耦合型方程(e)。坐标y_1及y_2叫做主坐标(*Principal coordinates*)或正坐标(*normal coordinates*)。

6.8 强迫振动和坐标解耦

n个自由度的粘性阻尼系统在任意激励力$F(t)$作用下，它的运动方程式能用矩阵形式表示

$$M\ddot{X}+C\dot{X}+KX=F \qquad (6.8\text{-}1)$$

如果阻尼矩阵C正比于质量矩阵或刚度矩阵，或者正比于它们的线性组合矩阵。该阻尼称为比例阻尼，表达为

$$C=\alpha M+\beta K \qquad (6.8\text{-}2)$$ [1]

式中α，β为常数。

比例阻尼情况下，以方程式（6.8-1）所表示的运动方程式能够用相应的自由振动系统的振型矩阵P或加权振型矩阵$\widetilde{P}$去耦。利用$\widetilde{P}$，令

$$X=\widetilde{P}Y \qquad (6.8\text{-}3)$$

这里Y是另一个列阵，方程式（6.8-3）表示了从X到Y的坐标变换。把方程式(6.8-3)代入(6.8-1)并且左乘以$\widetilde{P}'$，即得

$$\widetilde{P}'M\widetilde{P}\ddot{Y}+\widetilde{P}'C\widetilde{P}\dot{Y}+\widetilde{P}'K\widetilde{P}Y=\widetilde{P}'F \qquad (6.8\text{-}4)$$

把C用方程式（6.8-2）表示，同时注意到方程式（6.7-5）和（6.7-6），上面的方程式变为

$$I\ddot{Y}+(\alpha I-\beta\Lambda)\dot{Y}+\Lambda Y=\widetilde{P}'F \qquad (6.8\text{-}5)$$

由于方程式左边的全部系数项都是对角矩阵，故方程式(6.8-5)代表了下列形式的非耦合型二阶微分方程组

$$\ddot{y}_i+(\alpha+\beta\omega_i^2)\dot{y}_i+\omega_i^2y_i=Q_i(t) \qquad (6.8\text{-}6)$$

---

[1] 可以证明，$C=\alpha M^n+\beta K^m$也能够对角线化(参看习题6-12及6-13)。

上述方程组用拉普拉斯变换可很方便地解出。

倘若阻尼矩阵不是比例的，运动方程组将由阻尼矩阵加以耦合，要解这组联立方程必须用第6.10节介绍的状态空间法。

6.9 阻尼系统强迫振动主振型

主振型的振动中，系统的每个点将经受谐运动并同时通过平衡位置，我们发现这种运动对无阻尼自由振动是可能的。

如果诸激励力数目等于系统的自由度数目，那末主振型振动对阻尼振动系统也是可能的。为了说明这个道理，我们假设一个具有 n 个自由度的粘性阻尼系统，由频率为 ω 的谐振力所激励。则运动方程式为

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{F\}\sin\omega t \quad (6.9\text{-}1)$$

这里涉及到的问题是提出下列形式解的条件

$$\{x\}=\{X\}\sin(\omega t-\theta) \quad (6.9\text{-}2)$$

这种问题已由若干位学者研究过❶。他们的结论是给定激励频率ω，就存在着方程式(6.9-2)所描述的 n 个解。这些振型的每个解同各自的激振力所要求的指定位相θ_i，力向量$\{F\}_i$的分布相联系着的。这些情况下的响应称之为阻尼系统的强迫振动主振型，于是系统中每个点相对于其它点作同相移动并同时经过平衡位置。如同无阻尼自由振动情况一样，两个振型之间存在着正交关系。

如以方程式(6.9-2)代入方程式(6.9-1)，使对应项的系数相等，我们得到两个方程式

$$[([k]-[m]\omega^2)\sin\theta-[c]\omega\cos\theta]\{X\}=\{0\} \quad (6.9\text{-}3)$$

$$[([k]-[m]\omega^2)\cos\theta+[c]\omega\sin\theta]\{X\}=\{F\} \quad (6.9\text{-}4)$$

重新整理方程式(6.9-3)成为

$$[[1]\tan\theta-([k]-[m]\omega^2)^{-1}[c]\omega]\{X\}=\{0\} \quad (6.9\text{-}5)$$

---

❶ B.M.Fraejis de Veubeke, "Déphasages Characteristiques et Vibrations Forcés d'un Système Amorti," Académie Royale de Belgique, *Bulletin de la Classe des Sciences*, Series 5, Vol.XXXIV (1948), pp.626.

显然对应于方程式（6.9－5）的 n 个特征值有 n 个 $\tan\theta_i$ 值，每个$\tan\theta_i$有一个对应的特征向量$\{X\}_i$。以 θ_i和 $\{X\}_i$ 代入方程式(6.9-4)后即可求得所要求的力函数$\{F\}_i$。

改写方程式（6.9-3）第 i 型特征值和特征向量，左乘以第 j 型特征向量的转置阵，并且重复一下把 i 和 j 互换的过程就得到正交关系。

$$\tan\theta_i\{X\}'_j([k]-[m]\omega^2)\{X\}_i-\omega\{X\}'_j[c]\{X\}_i=0$$

$$\tan\theta_j\{X\}'_i([k]-[m]\omega^2)\{X\}_j-\omega\{X\}'_i[c]\{X\}_j=0$$

由于$[m]$，$[k]$及$[c]$的对称性，两式相减，对$\tan\theta_i\neq\tan\theta_j$时可得下式

$$\{X\}'_j([k]-[m]\omega^2)\{X\}_i=0 \qquad (6.9\text{-}6)$$

$$\{X\}'_j[c]\{X\}_i=0 \qquad (6.9\text{-}7)$$

同样从方程式(6.9-4)可得第三个关系

$$\{X\}'_j\{F\}_i=0 \qquad (6.9\text{-}8)$$

坐标转换

利用无阻尼系统的振型矩阵$[P]$或加权标准振型矩阵$[\widetilde{P}]$，它是振型矩阵$[P]$以它的第 i 列除以它的广义质量的平方根$(\{X\}'_i[m]\{X\}_i)^{1/2}$（参看第6.7节），将导出坐标转换的重要简化结果。如果下式变换式对方程式(6.9-1)进行转换

$$\{x\}=[\widetilde{P}]\{y\} \qquad (6.9\text{-}9)$$

左乘以转置阵$[\widetilde{P}]'$，方程式结果为

$$[1]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[\lambda_i]\{y\}=[\widetilde{P}]'\{F\}\sin\omega t \qquad (6.9\text{-}10)$$

式中　$[\lambda]_i=[\widetilde{P}]'[k][\widetilde{P}]$　　无阻尼固有频率的方阵

$[C]=[\widetilde{P}]'[c][\widetilde{P}]$　　对称阻尼矩阵

$[1]=[\widetilde{P}]'[m][\widetilde{P}]$　　单位阵

假定解的形式为

$$\{y\}=\{Y\}\sin(\omega t-\phi) \qquad (6.9\text{-}11)$$

上节的结论换成下列形式

$$\left([1]\tan\phi-\omega\left[\diagdown\frac{1}{\lambda_i-\omega^2}\diagdown\right][C]\right)\{Y\}=0 \qquad (6.9\text{-}12)$$

$$[([\lambda_i] - \omega^2[1])\cos\phi + \omega[C]\sin\phi]\{Y\} = [\widetilde{P}]'\{F\} \tag{6.9-13}$$

$$\{Y\}'_j([\lambda_i] - [1]\omega^2)\{Y\}_i = 0 \tag{6.9-14}$$

$$\{Y\}'_j[C]\{Y\}_i = 0 \tag{6.9-15}$$

$$\{Y\}'_j[\widetilde{P}]'\{F\}_i = 0 \tag{6.9-16}$$

如果用振型矩阵$[P]$替代加权标准矩阵$[\widetilde{P}]$，质量和刚度矩阵两者都将对角线化，而且质量矩阵将不是一单位矩阵。

数字算例

图6.9-1示一个二自由度系统，它的运动方程式为

$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\sin\omega t$$

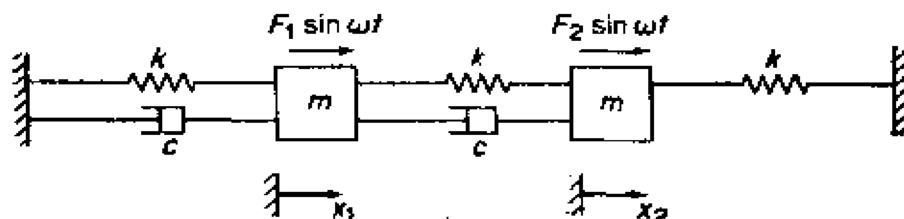


图 6.9-1

它的主振型由下式决定

$$\lambda_1 = \frac{k}{m} \qquad \left(\frac{x_1}{x_2}\right)_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3\frac{k}{m} \qquad \left(\frac{x_1}{x_2}\right)_2 = -1$$

因为两个振型的广义质量都是$2m$，振型矩阵和加权标准矩阵为

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\widetilde{P}] = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

利用$[\widetilde{P}]$，有

$$[\lambda_i] = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{c}{2m}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

方程式(6.9-12)变成

$$\left[[1]\tan\phi - \frac{\omega c}{2k}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3-\dfrac{\omega^2 m}{k}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \right]\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = 0$$

令$\mu = (2k/\omega c)\tan\phi$，上述方程式简化为

$$\begin{bmatrix} \left(\mu - \dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right) & \left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right) \\ \left(\dfrac{1}{3-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right) & \left(\mu - \dfrac{5}{3-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = 0$$

则从上述矩阵的行列式将找出特征值μ，

$$\mu^2 - \mu\left[\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}} + \frac{5}{3-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right] + \frac{4}{\left(1-\dfrac{\omega^2 m}{k}\right)\left(3-\dfrac{\omega^2 m}{k}\right)} = 0$$

从比值

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}} - \mu}$$

可找出特征向量。

为了求出数值，必须指定激振频率ω或$\omega^2 m/k$。取$\omega^2 m/k = 0.50$，则得

$$\mu_1 = 1.105 \qquad\qquad \mu_2 = 2.895$$

$$\{Y\}_{\mu_1}=\begin{Bmatrix}2.24\\1.00\end{Bmatrix}\qquad\{Y\}_{\mu_2}=\begin{Bmatrix}-2.24\\1.00\end{Bmatrix}$$

这些数值满足由方程(6.9-14)，(6.9-15)，给出的正交关系式，按方程(6.9-16)便能找到力的比值。

$$\{Y\}'_{\mu_2}[\widetilde{P}]'\{F\}_{\mu_1}=0$$

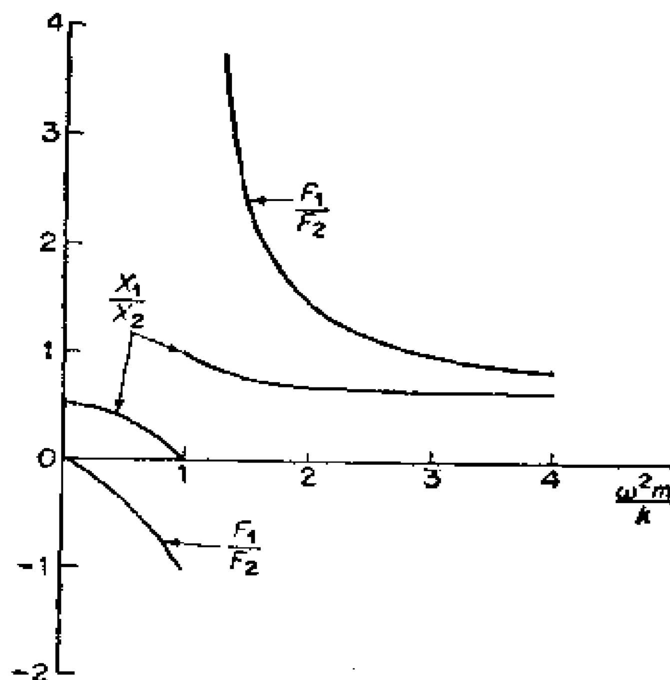


图 6.9-2 第一振型

由此式可推出$(F_1/F_2)_{\mu_1}=-0.382$。同样，$\{Y\}'_{\mu_1}[\widetilde{P}]'\{F\}_{\mu_2}=0$便得出

$$\left(\frac{F_1}{F_2}\right)_{\mu_2}=-2.61$$

最后，从转换$\{X\}=[\widetilde{P}]\{Y\}$可找出实际振幅$\{X\}$为

$$\{X\}_{\mu_1}=\begin{Bmatrix}0.382\\1.000\end{Bmatrix}\qquad\{X\}_{\mu_2}=\begin{Bmatrix}2.61\\1.00\end{Bmatrix}$$

为了使问题完整起见，必须选择其它频率ω^2m/k重复上述计算。两个振型用的振幅曲线和力比值曲线表示在图6.9-2及图6.9-3中。

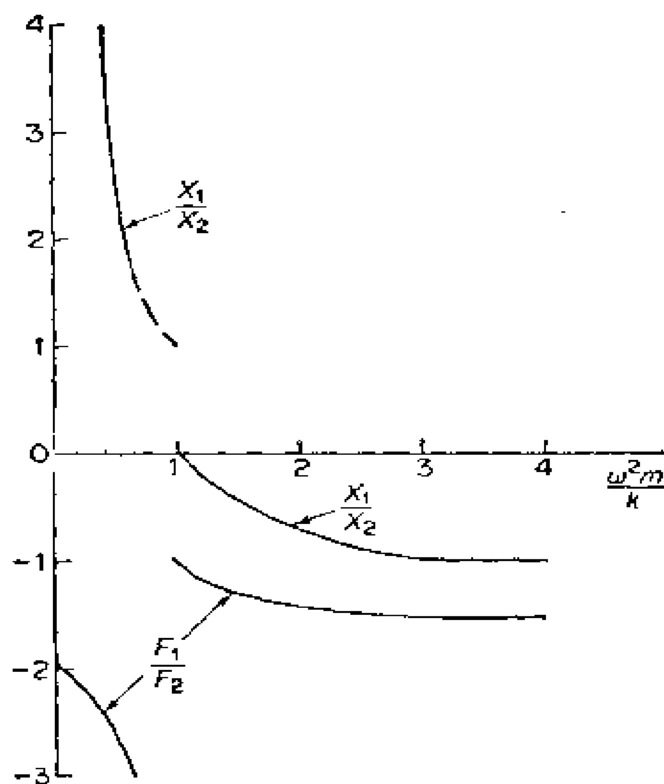


图 6.9-3 第二振型

6.10 状态空间法

在比例阻尼不存在的更一般情况下，象方程式（6.8-4）那样的二阶微分方程不能退偶，除非把它们改成为一阶方程组。对于改写的公式，每项原始变量及它们的导数要赋以新的变量，这个变量就叫做状态变量，因此二阶导数变换成新的状态变量的一阶导数。通过这个步骤虽然导数阶数降低了，但变量的数目却增加一倍，从而增加了计算的工作量。数字计算机的应用对数值计算来说就显得十分重要。

例 6.10-1

图6.10-1表示具有粘性弹性阻尼系统。这个系统由于附加上弹簧k_1使得多一个坐标x_1而与粘性阻尼系统有所不同。

相对于惯性坐标x和x_1的系统运动方程式是

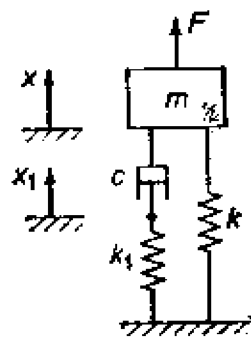


图 6.10-1

$$m\ddot{x} = -kx - c(\dot{x} - \dot{x}_1) + F$$

$$0 = c(\dot{x} - \dot{x}_1) - k_1 x_1 \qquad (6.10\text{-}1)$$

采用下列代号

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \beta = \frac{k_1}{m}, \qquad \alpha = \frac{k_1}{c}$$

方程式改写为

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \beta x_1 + \frac{F}{m}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} - \alpha x_1 \qquad (6.10\text{-}2)$$

现在选用下列状态变量 z

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ \dot{x}_1 &= \dot{z}_1 \\ x &= z_2 \\ \dot{x} &= z_3 = \dot{z}_2 \end{aligned} \qquad (6.10\text{-}3)$$

依照 z 重写运动方程式

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta & -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{F}{m} \end{Bmatrix} \qquad (6.10\text{-}4)$$

上述方程式以简化符号表示

$$\dot{z} = \mathrm{A}z + u \qquad (6.10\text{-}5)$$

式中

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} \qquad u = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{F}{m} \end{Bmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta & -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

大家知道，这个一阶方程式能写成闭式解

$$z = e^{At} z_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} u(\tau) d\tau \qquad (6.10\text{-}6)$$

这个明白简单的方程式实际上并不那么简单，它要求用数字

解，这将在下面章节中阐明。

解 1： 考虑齐次方程

$$\dot{z} = Az \tag{6.10-7}$$

它的解为

$$z = e^{At} z_0 \tag{6.10-8}$$

方程式中 e^{At} 项需要解释一下。一种方法就是考虑用齐次方程的拉普拉斯变换求解并比较它们的结果，令 $\bar{z}(s)$为列向量 z 的拉普拉斯变换，我们得到

$$s\bar{z}(s) - z_0 = A\bar{z}(s)$$

或 (6.10-9)

$$[sI - A]\bar{z}(s) = z_0$$

于是

$$z = \mathscr{L}^{-1}[sI - A]^{-1} z_0 \tag{6.10-10}$$

由此我们可得出结论

$$e^{At} = \mathscr{L}^{-1}[sI - A]^{-1}$$

$$= \mathscr{L}^{-1} \frac{\mathrm{adj}[sI - A]}{|sI - A|} \tag{6.10-11}$$

显然对特征方程式 $|sI - A| = 0$的根s_i必须进行评定。在求逆过程后，方程式的右边将是一个方阵，它的元素是$e^{s_i t}$乘以常数。如果有重根存在，矩阵中也将出现 $te^{s_i t}$ 项。

解 2： 我们也能把状态空间方程式作为一个特征值、特征向量问题来检验它的解。从特征方程式

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{6.10-12}$$

可得出特征值，同时从第 i 个振型带有λ_i的伴随矩阵 $\mathrm{adj}[\lambda I - A]$ 之一列得出特征向量。

在解决这个问题以前，这里我们介绍一项对角线化技巧，它对解方程是重要的。从方程式(6.10-5)得到的齐次方程首先把第 i 个振型写成

$$[A - \lambda_i]Z_i = 0 \tag{6.10-13}$$

这里所假定的特征值是明确的。

这样的方程有 n 个(本题$n=3$)，我们将重新改写为

$$AZ_i=\lambda_i Z_i \tag{6.10-14}$$

n 个矩阵方程可根据振型矩阵 P 和定义为

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & 0\\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{6.10-15}$$

的特征值对角线矩阵化为一个矩阵方程。因此集合方程变成为

$$AP=P\Lambda \tag{6.10-16}$$

容易证明该集合方程正是方程式(6.10-14)指明的 n 个方程组。如果上述方程式左乘以P^{-1}可得

$$P^{-1}AP=\Lambda \tag{6.10-17}$$

于是矩阵 A 被化成由系统特征值构成的对角线矩阵。

现在回到方程式(6.10-5)的解上来，引入坐标变换

$$Z=Py \tag{6.10-18}$$

得到

$$P\dot{y}=PAy+u \tag{6.10-19}$$

左乘P^{-1}，有

$$\begin{aligned}\dot{y}&=P^{-1}APy+P^{-1}u \qquad (6.10\text{-}20)\\ &=\Lambda y+P^{-1}u\end{aligned}$$

方程式(6.10-20)是非耦合型，y_i 的解可以用拉普拉斯变换方便地求得。

只考虑齐次方程

$$\dot{y}=\Lambda y \tag{6.10-21}$$

解为

$$y=e^{\Lambda t}y_0 \tag{6.10-22}$$

或

$$\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}_0 \tag{6.10-23}$$

转换到原来的坐标，我们标注出$y=P^{-1}z$。代入方程式(6.10-22)并左乘P，可得

$$z=Pe^{\Lambda t}P^{-1}z_0 \tag{6.10-24}$$

同方程式(6.10-8)比较，我们可得出结论

$$e^{At}=Pe^{\Lambda t}P^{-1} \tag{6.10-25}$$

这又是一个$n\times n$的方阵。

习　　题

6-1　求图P.6-1示的系统刚度矩阵，并用它的逆阵建立柔度矩阵。

6-2　试建立题6-9的刚度矩阵和柔度矩阵。

6-3　长度为l的匀质简支梁，在$0.25l$和$0.6l$处作用有重量载荷。求这些位置的柔度影响系数。

6-4　图P.6-4示的悬臂梁，求其柔度矩阵并从它的逆阵计算刚度矩阵。

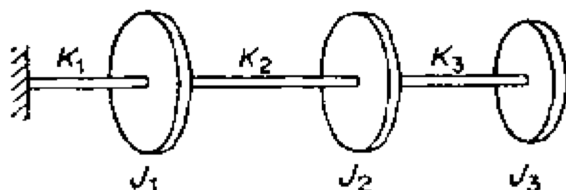


图 P.6-1

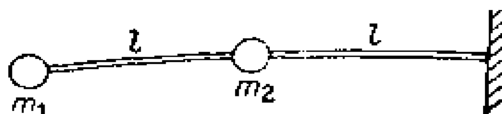


图 P.6-4

6-5　如图P.6-5带有n个串联弹簧系统。证明它的刚度矩阵是一个沿对角线的带状矩阵。

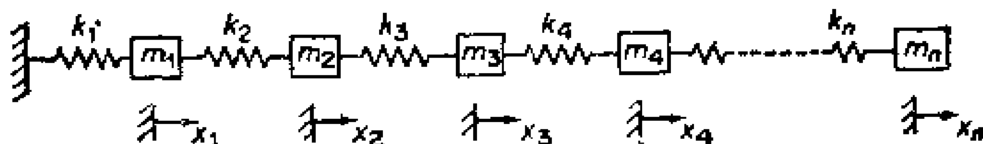


图 P.6-5

6-6　求题6-5所述系统的柔度矩阵。

6-7　利用伴随矩阵，求图P.6-7所示弹簧-质量系统的主振型。

6-8　对图P.6-8所示系统，写出矩阵表示的运动方程式，并由伴随矩阵求其主振型。



图 P.6-7

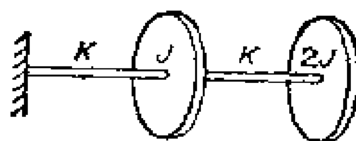


图 P.6-8

6-9 图 P.6-9所示两根等长度但具有不同质量的匀质杆。用矩阵方法求它们的运动方程式、固有频率和振型形状。

6-10 证明题6-8所示系统的主振型是正交的。

6-11 证明方程式(6.5-7)的关系式

$$X'_i K X_j = 0$$

适用于题6-8。

6-12 根据矩阵方程式

$$K\phi_s = \omega_s M\phi_s$$

首先左乘KM^{-1}，并利用正交关系$\phi'_r M\phi_s = 0$，证明

$$\phi'_r KM^{-1}K\phi_s = 0$$

进一步证明

$$\phi'_r [KM^{-1}]^h K\phi_s = 0 \qquad h = 1, 2, \cdots n$$

这里n是系统自由度数目。

6-13 用类似题6-12方法，试证明

$$\phi'_r [MK^{-1}]^h M\phi_s = 0 \qquad h = 1, 2 \cdots n$$

6-14 求图P.6-14所示系统的振型矩阵P及加权振型矩阵$\tilde{P}$，证明P或$\tilde{P}$将可使刚度矩阵对角线化。

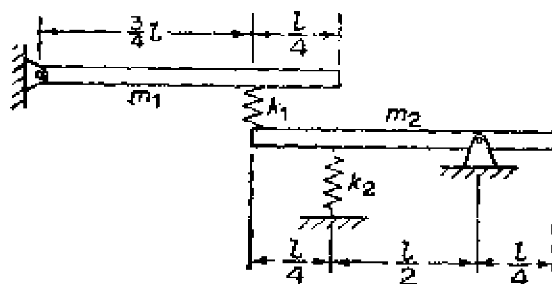


图 P.6-9

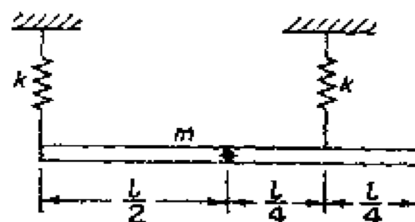


图 P.6-14

6-15 图P.6-15所示系统，选择杆端坐标x_1, x_2，并求杆件的耦合型。

6-16 写出图P.6-15所示系统用另外一组坐标表示的动能和位能表达式，并注意，如果在T或U中有坐标的矢积便存在耦合。

6-17 求图P.6-17所示系统的振型矩阵和加权振型矩阵 $\tilde{P}$，并使刚度矩阵对角线化，从而使方程组解耦。

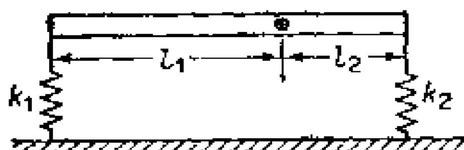


图 P.6-15



图 P.6-17

6-18 求题6-14系统的P，并使方程组解耦。

6-19 求有两个坐标 θ_1和θ_2 的双摆的 $\tilde{P}$。说明$\tilde{P}$使运动方程式解耦。

6-20 用拉普拉斯变换法求图P.6-20所示的强迫振动问题的解。

6-21 求图P.6-21所示系统的阻尼矩阵，并说明它不是比例阻尼。

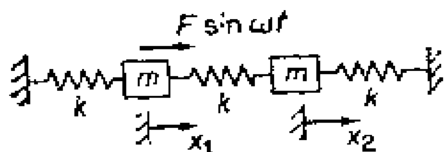


图 P.6-20

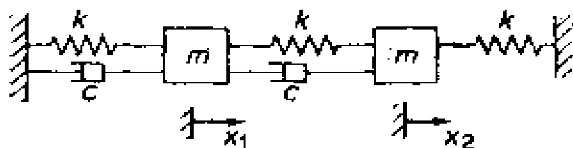


图 P.6-21

6-22 利用振型矩阵$\tilde{P}$把题 6-21系统简化为只有阻尼耦合，并用拉普拉斯变换法求解。

6-23 求图P.6-23所示系统强迫稳态响应。

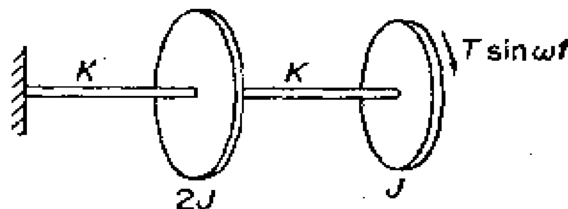


图 P.6-23

6-24 图6.10-1所示系统的常数给定为

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 100, \qquad \beta = \frac{k_1}{m} = 10, \qquad \alpha = \frac{k_1}{c} = 4$$

求系统矩阵$[A-\lambda I]$。

6-25 证明题6-24的伴随矩阵adj$[A-\lambda I]$为

$$\begin{bmatrix} (\lambda^2+100) & -100 & \lambda \\ -10 & \lambda(4+\lambda)+10 & (4+\lambda) \\ -10\lambda & -100(4+\lambda) & \lambda(4+\lambda) \end{bmatrix}$$

6-26 题6-24的特征方程式为

$$\lambda^3+4\lambda^2+110\lambda+400=0$$

它的根为

$$\lambda_1=-3.676, \qquad \lambda_{2,3}=-0.1619+i10.43$$

利用λ_1，证明伴随矩阵的每一列正比于第1型的特征向量，这个特征向量能简化为

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -11.35 \\ 1.0 \\ -3.676 \end{Bmatrix}$$

6-27 如果$\lambda_2=-0.1619+i10.43$被代入题6-24的$adj[A-\lambda I]$，证明它的每一列可简化为第2型特征向量

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.876+i0.338 \\ 1.00 \\ -0.1619+i10.43 \end{Bmatrix}$$

6-28 证明题6-24的振型矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} -11.35 & 0.876+i0.338 & 0.876-i0.338 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ -3.676 & -0.1619+i10.43 & -0.1619-i10.43 \end{bmatrix}$$

6-29 把图6.10-1的粘性弹性系统与粘性阻尼系统比较，证明等效粘性阻尼和等效刚度为

$$c_{eq}=\frac{c}{1+\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)^2}$$

$$k_{eq}=\frac{k+(k_1+k)\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)^2}$$

6-30 设一单自由度粘性阻尼系统

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F\sin\omega t$$

试用状态空间矩阵方程来表示。

6-31 求解题6-30的状态空间方程式，并同二阶方程的解进行比较。

第七章　集中参数系统

7.1　导引

当系统的自由度数目增多时，求取数值结果的问题变得困难了，为此必须依靠高速电子计算机求解。虽然寻找矩阵方程的特征值和特征向量的问题通常由电子计算机来处理，但是近似解法和其它替代方法常常还是有效的。特别是把一个复杂系统分解为具有简单弹性和动力特性的子系统的这种概念是一种有效方法，它能使复杂系统的解本来是含混模糊的而变成能处理的事情了。

本章将举例讨论和说明构成这些基本概念的基本思想。

7.2　特征方程

两种交替的方法适用于特征值、特征向量求解问题。矩阵方程

$$M\ddot{X}+KX=0 \tag{7.2-1}$$

首先左乘以 M^{-1}，并假设一谐运动 $\ddot{X}=-\lambda X$，此处 $\lambda=\omega^2$，可得方程式

$$[A-\lambda I]X=0 \tag{7.2-2}$$

由于系统的全部动力特性可由上述方程中的矩阵 $A=M^{-1}K$ 来确定，所以矩阵 A 通常被称为**系统矩阵**。

作为上述方程式的一种方案，我们对方程式（7.2-1）左乘 K^{-1}，得到方程

$$[A^{-1}-\lambda^{-1}I]X=0 \tag{7.2-3}$$

这里 $A^{-1}=K^{-1}M$，K^{-1}是**柔度矩阵**$[a]$。由此可找到特征值，于是特征方程式可写成下述形式

$$|A-\lambda I|=0 \tag{7.2-4}$$

或

$$|A^{-1}-\lambda^{-1}I|=0 \qquad (7.2\text{-}5)$$

方程式（7.2-4）以刚度公式为基础，反之方程式（7.2-5）以柔度公式为基础。第一个方程式导出 $\lambda=\omega^2$ 的 n 次代数方程式，而第二个方程式将导出$\lambda^{-1}=\omega^{-2}$ 的 n 次代数方程式。

7.3 影响系数法

方程式（7.2-3)是以柔度影响系数为基础的运动方程式的一种简写形式。现在我们想进一步研究该方程式的细节。

根据重录如下的方程式（6.2-1）

$$\begin{aligned} x_1&=a_{11}f_1+a_{12}f_2+a_{13}f_3\\ x_2&=a_{21}f_1+a_{22}f_2+a_{23}f_3\\ x_3&=a_{31}f_1+a_{32}f_2+a_{33}f_3\end{aligned} \qquad (6.2\text{-}1)$$

我们假设一谐运动，且用惯性力 $-m_i\ddot{x}_i=\omega^2m_ix_i$ 代替力 f_i 。方程式（6.2-1）便变成为

$$\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\omega^2\begin{pmatrix} a_{11}m_1 & a_{12}m_2 & a_{13}m_3\\ a_{21}m_1 & a_{22}m_2 & a_{23}m_3\\ a_{31}m_1 & a_{32}m_2 & a_{33}m_3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix} \qquad (7.3\text{-}1)$$

或

$$\left[A^{-1}-\left(\frac{1}{\omega^2}\right)I\right]\{X\}=0$$

这里A^{-1}等于方程式（7.3-1）右边的方阵。

特征方程式用行列式表示

$$\begin{vmatrix} \left(a_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}\right) & (a_{12}m_2) & (a_{13}m_3)\\ (a_{21}m_1) & \left(a_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right) & (a_{23}m_3)\\ (a_{31}m_1) & (a_{32}m_2) & \left(a_{33}m_3-\frac{1}{\omega^2}\right)\end{vmatrix}=0 \qquad (7.3\text{-}2)$$

行列式展开得到（$1/\omega^2$）的三次方程式

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^3-(a_{11}m_1+a_{22}m_2+a_{33}m_3)\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2+\cdots=0 \qquad (7.3\text{-}3)$$

如果该方程式的根为 $1/\omega_1^2$，$1/\omega_2^2$ 及 $1/\omega_3^2$，上述方程式能因式分解为下列形式

$$\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega_2^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega_3^2}\right)=0$$

或

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^3-\left(\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}+\frac{1}{\omega_3^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2+\cdots=0 \quad (7.3\text{-}4)$$

显然，这里 $(1/\omega^2)^2$ 前的系数等于特征方程根的和，也等于 A^{-1} 的对角线项之和，矩阵对角线项和称为矩阵的迹（参看附录C）

$$\text{trace}A^{-1}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{\omega_i^2}\right) \quad (7.3\text{-}5)$$

例 7.3-1

应用例6.2-1的影响系数，求图6.2-1所示系统的主振型的矩阵方程式。

解：系统矩阵 A 的逆阵

$$A^{-1}=K^{-1}M=[a]M$$

$$=\frac{l^3}{3EI}\begin{pmatrix}27 & 14 & 4\\ 14 & 8 & 2.5\\ 4 & 2.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3\end{pmatrix}$$

方程式（7.2-3）变成

$$\left[[a][m]-\frac{1}{\omega^2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\{X\}=0$$

或

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\frac{\omega^2 l^3}{3EI}\begin{pmatrix}27 & 14 & 4\\ 14 & 8 & 2.5\\ 4 & 2.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

例 7.3-2

给出方程式

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

试用克莱姆法则求刚度矩阵。

解：根据克莱姆法则，f_1能写成

$$f_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|a|}$$

取 $x_1 = 1$，$x_2 = x_3 = 0$，k_{11} 可找到为

$$k_{11} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|a|}$$

取$x_2 = 1$，$x_1 = x_3 = 0$，k_{12} 可找到为

$$k_{12} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|a|} = k_{21}$$

同样，所有其它项都能求得。应该指出，上述方法是矩阵$[a]$的求逆的初阶。

7.4 瑞利原理

单自由度保守系统的固有频率能够利用最大动能与最大势能相等的原理找到。瑞利指出❶这种方法还能应用于多自由度系统，仅要对位移有合理分布的假设。利用矩阵符号对这种方法能方便地进行如下讨论。

令M和K是质量矩阵和刚度矩阵，X为所假定的振幅的位移向量。则对于谐运动，最大动能和势能能写成

---

❶ John W. Strutt, Baron Rayleigh, *The Theory of Sound* (2nd rev ed.) (New York: Dover Publications, 1937), Vol. 1, pp. 109-10.

$$T_{\max}=\frac{1}{2}\omega^2X'MX \tag{7.4-1}$$

$$U_{\max}=\frac{1}{2}X'KX \tag{7.4-2}$$

使两者相等，解得ω^2，找得所谓瑞利比数

$$\omega^2=\frac{X'KX}{X'MX} \tag{7.4-3}$$

这个比数从上限接近于最低固有频率(或基本频率)，它的数值对所假设的振幅的选择并不很敏感。为了说明这特性，我们将依据主振型 X_i 表示所假设的变位曲线如下

$$X=X_1+C_2X_2+C_3X_3+\cdots \tag{7.4-4}$$

然后

$$X'KX=X_1'KX_1+C_2^2X_2'KX_2+C_3^2X_3'KX_3+\cdots$$

$$X'MX=X_1'MX_1+C_2^2X_2'MX_2+C_3^2X_3'MX_3+\cdots$$

这里 $X_i'KX_j$ 及 $X_i'MX_j$ 的交叉项由于正交条件可略去。

用记号

$$X_i'KX_i=\omega_i^2X_i'MX_i \tag{7.4-5}$$

瑞利比数变成

$$\omega^2=\omega_1^2\left\{1+C_2^2\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}-1\right)\frac{X_2'MX_2}{X_1'MX_1}+\cdots\right\} \tag{7.4-6}$$

如果把 $X_i'MX_i$ 统一为同样的数，上述方程式简化为

$$\omega^2=\omega_1^2\left\{1+C_2^2\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}-1\right)+\cdots\right\} \tag{7.4-7}$$

显然ω^2大于ω_1^2，因为$\omega_2^2/\omega_1^2>1$。由于C_2代表所假定的振幅和精确的振幅 X_1 的偏差，则计算频率的误差只是同这种偏差的平方值成正比。

这种分析说明如果所假设的正是精确的基本位移（或振型）X_1，由这种方法找到的基本频率就是正确的频率，因而 C_2，C_3 等将是零值。对其它曲线而言，所确定的频率将比基本频率高。这个事实能够这样来说明，任何偏离固有曲线的偏差需要附加的约

束条件，这意味着有较大的刚度和较高的频率。一般说来，应用弹性体的静变位曲线会得到十分精确的基本频率的数值。如果想要取得更为精确的值，就要反复改进近似曲线。

能对基本频率给出较好的估计值的瑞利比数的其它形式，可以从根据柔度影响系数而建立的运动方程式得到

$$X = aM\ddot{X} = \omega^2 aMX \qquad (7.4\text{-}8)$$

左乘以 $X'M$ 可得

$$X'MX = \omega^2 X'MaMX$$

瑞利比数就变成

$$\omega^2 = \frac{X'MX}{X'MaMX} \qquad (7.4\text{-}9)$$

当X用以前所介绍的主振型来表达时，正交条件将再次消去全部 $i \neq j$ 项，而基本频率的估算成为

$$\omega^2 = \omega_1^2\left\{1 + C_2^2\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) + \cdots\right\} \qquad (7.4\text{-}10)$$

因为 $(1 - \omega_1^2/\omega_i^2)$ 比 $(\omega_i^2/\omega_1^2 - 1)$ 小，所以$\omega_i > \omega_1$，方程式（7.4-9）导出较为满意的基本频率估算值。

在这一节里我们想把瑞利法推广到梁的振动。令m为沿梁的长度方向的梁的单位长度质量，y为所假定的变位曲线的振幅，动能用下式表示

$$T_{max} = \frac{1}{2}\int \dot{y}^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int y^2 dm$$

式中ω 为基本频率弧度/秒。

梁的势能由储藏在梁内的弹性能所做的功来定出。令M为弯矩，θ为弹性曲线的转角，所做的功等于

$$U = \frac{1}{2}\int M d\theta$$

由于梁的位移一般说来是较小的，下面的几何关系可成立（参看图7.4-1）。

$$\theta = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

从梁的理论加上这些关系式，我们得到弯曲公式

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

式中 EI 是梁的弯曲刚度，R 是曲率半径。把 $d\theta$ 及$1/R$的表达式代入上式，U 可写成

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\int EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

使动能、势能相等，梁的基本频率从方程式可确定

$$\omega^2 = \frac{\int EI(d^2y/dx^2)^2 dx}{\int y^2 dm} \tag{7.4-11}$$

例 7.4-1

用这种方法于图 7.4-2 所示具有均匀断面的简支梁。我们假定位移用正弦曲线表示为

$$y = \left(y_0 \sin\frac{\pi x}{l}\right)\sin\omega t$$

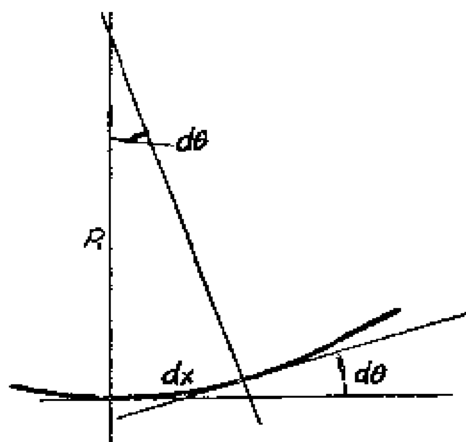


图 7.4-1

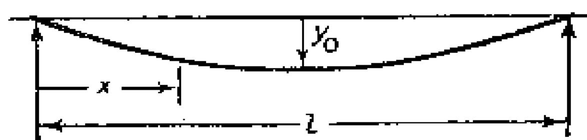


图 7.4-2

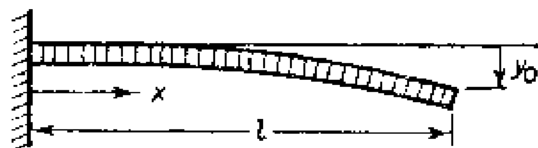


图 7.4-3

式中y_0是跨中最大位移。因此二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 y_0\sin\frac{\pi x}{l}\sin\omega t$$

把它代入方程式（7.4-11）我们得

$$\omega^2 = \frac{EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}dx}{\frac{w}{g}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}dx} = \pi^4\frac{gEI}{wl^4}$$

因此可得到基本频率

$$\omega_1 = \pi^2\sqrt{gEI/wl^4}$$

这种场合所假设的曲线正好是正确的曲线，则由瑞利法可得到精确的频率。若所假定的是其它曲线，在频率方程内的常数将比 π^2 大。

例 7.4-2

如果图 7.4-2 所示梁的两端间距离是固定不变的，由横向位移将产生拉应力 σ。试在频率方程式中考虑这种附加的应变能。

解：由于有横向位移，梁的长度dx将增加大约为

$$[\sqrt{1+(dy/dx)^2} - 1]dx \cong \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

在 dx 单元上附加的应变能为

$$dU = \frac{1}{2}\sigma A\varepsilon dx = \frac{1}{2}EA\varepsilon^2 dx$$

式中 A 是断面面积，σ为拉应力，$\varepsilon = \frac{1}{2}(dy/dx)^2$ 是单位应变。

使动能等于弯曲、拉伸形成的总应变能，可得

$$\frac{1}{2}\omega^2\int y^2 dm = \frac{1}{2}\int EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\frac{EA}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 dx$$

然后从上述方程式便导出频率方程式

$$\omega_1^2 = \frac{\int EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \int\frac{EA}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 dx}{\int y^2 dm}$$

这方程式包含有拉伸引起的附加项。

例 7.4-3

下面考虑图 7.4-3 所示的悬臂梁。我们假定梁任意点 x 的振幅与无重量的悬臂梁在端部作用集中载荷而产生的静变位曲线完全一致。

写出该方程式

$$y=\frac{1}{2}y_0\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

式中 $y_0=Pl^3/3EI$ 是悬臂梁自由端的挠度，自由端的刚度为 $k=P/y_0=3EI/l^3$。势能等于所做的功，于是

$$U_{max}❶=\frac{1}{2}ky_0^2=\frac{3EI}{2l^3}y_0^2$$

根据梁的质量和速度平方的乘积的一半，沿梁的全长积分便得动能

$$T_{max}=\frac{w}{2g}\int_0^l(\omega y)^2dx=\frac{w}{2g}\left(\frac{\omega y_0}{2}\right)^2\int_0^l\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{33wl}{140g}\right)\omega^2y_0^2$$

上面方程式表明在所假定的变位曲线条件下，重量为 w 磅/英尺的连续梁的振动特性同一根无重量梁端部作用有一集中质量 $\left(\frac{33}{140}wl\right)$ 的情况是等效的。

使动能与势能相等，振动的基本频率（弧度/秒）为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{(3EI/l^3)g}{\frac{33}{140}wl}}=3.56\sqrt{gEI/wl^4}$$

这种情况的精确解为

$$\omega_1=3.515\sqrt{gEI/wl^4}$$

---

❶ 该结果亦可从方程式 $U_{max}=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx$ 得到。

一般说来，该例题所假定的变位曲线应当满足位移、转角、剪力和弯矩的边界条件。用静变位曲线是满足这些条件的。通常它会得到具有容许精度的频率。

如果一根梁是用一系列集中重量W_1，W_2，W_3…来代替，则最大应变能可以由这些载荷所做的功来求。作为第一近似，可以用相应点的静挠度y_1，y_2，y_3…，这种情况下最大动能和势能是

$$T_{max}=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}[W_1y_1^2+W_2y_2^2+W_3y_3^2+\cdots] \quad (7.4\text{-}12)$$

$$U_{max}=\frac{1}{2}[W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3+\cdots] \quad (7.4\text{-}13)$$

使两者相等，建立频率方程为

$$\omega_1^2=\frac{g\Sigma Wy}{\Sigma Wy^2} \quad (7.4\text{-}14)$$

例 7.4-4

说明应用上述方程式，找出图 7.4-4 所示系统的横向振动的基本频率的第一近似解。

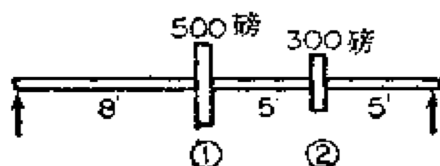


图 7.4-4

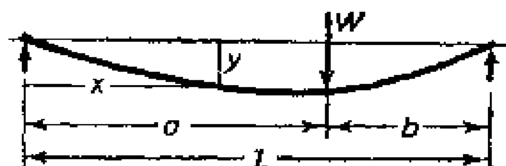


图 7.4-5

参照图 7.4-5 一个集中载荷W作用位置离梁的端部距离为a及b，在任意点x处的挠度可由下式求得

$$y_x=\frac{Wbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)$$

该公式在任何材料力学教程中都能找到[1]。载荷所在处的变位可由两个载荷的迭加得到，如图 7.4-6 示。

[1] Egor P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids* (Englewood Cliffs, N.J.; Prentice-Hall, Inc., 1968)

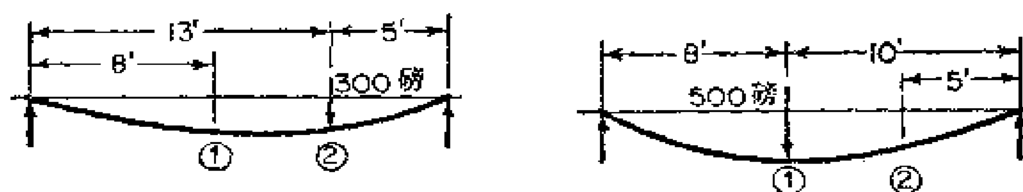


图 7.4-6

$$y_1' = \frac{300\times5\times8}{6\times18\times EI}(18^2-8^2-5^2)\times12^3 = \frac{45.2\times10^6}{EI}\text{英寸}$$

$$y_2' = \frac{300\times5\times13}{6\times18\times EI}(18^2-13^2-5^2)\times12^3 = \frac{40.7\times10^6}{EI}\text{英寸}$$

$$y_1'' = \frac{500\times8\times10}{6\times18\times EI}(18^2-10^2-8^2)\times12^3 = \frac{103\times10^6}{EI}\text{英寸}$$

$$y_2'' = \frac{500\times8\times5}{6\times18\times EI}(18^2-5^2-8^2)\times12^3 = \frac{75.3\times10^6}{EI}\text{英寸}$$

y'和y''相加，位置 1 及 2 处的变位成为

$$y_1 = 148\times\frac{10^6}{EI}\qquad y_2 = 116\times\frac{10^6}{EI}$$

代入方程式（7.4-14）基本频率的第一近似值为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g\Sigma Wy}{\Sigma Wy^2}} = \sqrt{\frac{386(500\times148+300\times116)EI}{(500\times148^2+300\times116^2)10^6}}$$
$$= 0.0017\sqrt{EI}\ \text{弧度/秒}$$

如果想要更精确些，则用动力载荷代替静荷重能够使得更好地趋近于动力曲线。由于动载荷 $m\omega^2y$ 是正比于挠度的。我们就能用修改过的重量W_1和$W_2(y_2/y_1)$ 重新计算变位。

动载荷的概念，也可用于开始假定的曲线比静变位曲线更简单的情况。设这样的曲线为$y(x)$，单位长度的动载荷为$\omega^2m(x)y(x)$，它与沿梁长度方向剪力的改变量相等（见图7.4-7），即

$$dV = \omega^2m(x)y(x)dx$$

由于 $dM = Vdx$，弯矩M可由积分求得。把M代入下式

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI} dx$$

可知势能正比于 ω^4 。实际上从 T_{max} 方程式看来并不会由于所假定曲线的粗糙而那么敏感，但是取决于曲率的应变能可能有较大的误差。因此必须仔细地运算。

例 7.4-5

利用简单曲线 $y = cx^2$，求图7.4-8 所示的均匀悬臂梁的基本频率。

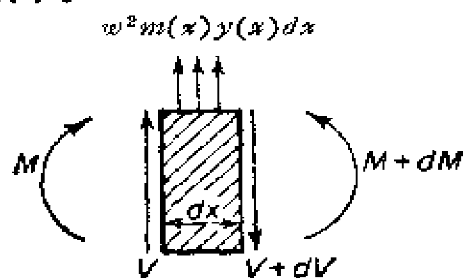


图 7.4-7

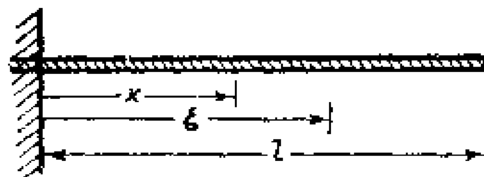


图 7.4-8

解：如果用方程式（7.4-11）求频率，我们发现所得结果误差较大。因为上面关于曲线的假定不能满足这里自由端的边界条件。按方程式（7.4-11）得

$$\omega = 4.47\sqrt{EI/ml^4}$$

但是精确值为

$$\omega_{i} = 3.52\sqrt{EI/ml^4}$$

按本题所给定的曲线，根据前面章节简述的方法便可找到接近的结果。

$$V(\xi) = \omega^2\int_{\xi}^{l} mc\xi^2 d\xi = \frac{\omega^2 mc}{3}(l^3 - \xi^3)$$

弯矩为

$$M(x) = \int_{x}^{l} V(\xi)\, d\xi = \frac{\omega^2 mc}{3}\int_{x}^{l}(l^3 - \xi^3)d\xi$$

$$= \frac{\omega^2 mc}{12}(3l^4 - 4l^3x + x^4)$$

把$M(x)$代入U_{max}可得最大应变能

$$U_{max}=\frac{1}{2EI}\left(\frac{\omega^2 mc}{12}\right)^2\int_0^l(3l^4-4l^3x+x^4)^2dx$$

$$=\frac{\omega^4}{2EI}\frac{m^2c^2}{144}\frac{312}{135}l^9$$

最大动能为

$$T_{max}=\frac{1}{2}\int_0^l \dot{y}^2 m dx=\frac{1}{2}c^2\omega^2 m\int_0^l x^4 dx=\frac{1}{2}c^2\omega^2 m\frac{l^5}{5}$$

使它们相等，我们即得

$$\omega_1=\sqrt{12.47EI/ml^4}=3.53\sqrt{EI/ml^4}$$

它十分接近于精确解。

7.5 邓克列公式[●]

给出了基本频率上限的瑞利原理，现在可用邓克列公式加以补充，它定出基本频率的下限。从方程式（7.3-3）及（7.3-4）容易看出，一个n个自由度系统的关系式为

$$\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}+\cdots+\frac{1}{\omega_n^2}=a_{11}m_1+a_{22}m_2+\cdots+a_{nn}m_n \quad (7.5\text{-}1)$$

因为a_{ii}是影响系数，它等于在i处的单位载荷引起的在i处的挠度，因此，它的倒数就是刚度系数k_{ii}，它等于在i处产生单位位移所需要的力。同样

$$\omega_{ii}=\sqrt{\frac{k_{ii}}{m_i}} \quad (7.5\text{-}2)$$

是当系统里只有m_i存在时系统的固有频率。因此我们能把方程式（7.5-1）写成下列等效的形式

$$\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}+\cdots+\frac{1}{\omega_n^2}=a_{11}m_1+a_{22}m_2+\cdots+a_{nn}m_n$$

● S. Dunkerley, "On the Whirling and Vibration of Shafts", *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 185 (1895), 269-360.

$$= \frac{m_1}{k_{11}} + \frac{m_2}{k_{22}} + \cdots + \frac{m_n}{k_{nn}} \qquad (7.5\text{-}3)$$

$$= \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_{nn}^2}$$

基本频率的估算可从下面这个观点得到，即认为 ω_2，$\omega_3\cdots$等是较高固有频率的振型，因此方程式（7.5-3）左边的 $1/\omega_2^2$，$1/\omega_3^2\cdots$等项可以略去。由于略去了这些项，$1/\omega_1^2$ 就大于它的真实值，因而ω_1将小于基本频率精确值。

例 7.5-1

一个结构承受振动试验时为了估算出结构的基本频率，邓克列公式是有用的。为了确定结构的固有频率，常常利用给结构附加上一个偏心质量激振器并且标注出同最大幅度相应的频率的方法。这样测出的频率代表着结构加上激振器的频率，当激振器的质量在总质量中占有显著百分比时，可以明显地从结构本身的固有频率中分离出激振器的频率。这种情况下，结构自身的基本频率可以由下列方程式确定

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} \qquad (a)$$

式中　ω_1 = 结构加上激振器的基本频率

ω_{11} = 结构本身的基本频率

ω_{22} = 结构上没有其它质量时装在结构上的激振器的固有频率

有时用其它形式可以方便地表达这个方程式，例如

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + a_{22}m_2 \qquad (b)$$

这里 m_2 是集中重量的质量或激振器质量，a_{22} 为结构在激振器所在点的影响系数。

例 7.5-2

一架飞机飞行舵的调整片由一个重量为 1.5 磅偏心质量的振动器振动时，测得谐振频率为 30 周/秒。对振动器附上附加重量

1.5磅，谐振频率就降低至24周/秒。求调正片的真实固有频率。

解：所测得的谐振频率是相当于调整片和振动器总质量的频率。令f_{11}为调整片的真实固有频率，代入例7.5-1中方程式(b)可得

$$\frac{1}{(2\pi\times30)^2}=\frac{1}{(2\pi f_{11})^2}+\frac{1.5}{386}a_{22}$$

$$\frac{1}{(2\pi\times24)^2}=\frac{1}{(2\pi f_{11})^2}+\frac{3.0}{386}a_{22}$$

消去a_{22}，真实固有频率为

$$f_{11}=45.3\text{周/秒}$$

在振动器附加质量位置处调整片的刚度可以用$1/a_{22}$求到，从同一方程式得出

$$k_2=\frac{1}{a_{22}}=\frac{1}{0.00407}=246\quad\text{磅/英寸}$$

例 7.5-3

求一根端部作用有一集中质量M的匀质悬臂梁的基本频率，该质量M正好等于匀质梁本身的质量（见图7.5-1)。

解：匀质承载梁的自身频率方程式为

$$\omega_{11}^2=3.515^2\left(\frac{EI}{Ml^3}\right)$$

把集中质量附加到一根无重量悬臂梁上，可得

$$\omega_{22}^2=3.0\left(\frac{EI}{Ml^3}\right)$$

代入到邓克列公式重新整理成下列形式，系统的固有频率可确定为

$$\omega_1^2=\frac{\omega_{11}^2\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2+\omega_{22}^2}=\frac{3.515^2\times3.0}{3.515^2+3.0}\left(\frac{EI}{Ml^3}\right)=2.41\left(\frac{EI}{Ml^3}\right)$$

该结果可以与下列由瑞利法得到的频率公式加以比较

$$\omega_1^2=\frac{3EI}{\left(1+\frac{33}{140}\right)Ml^3}=2.43\left(\frac{EI}{Ml^3}\right)$$

例 7.5-4

给定机翼扭转固有频率为每分1600次。如果有一个1000磅燃油箱挂在距离飞机中心线 1/6 半翼展（或半跨长）的位置处，这时它对扭转轴线的惯性矩为 1800磅英寸/秒^2，问新的扭转频率为多少？机翼在该点处的扭转刚度是60×10^6英寸/弧度。

解：附加有油箱的无重量机翼的频率为

$$f_{22}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{60\times10^6}{1800}}=29.1\text{周/秒}=1745\text{次/分}$$

带有油箱的新的扭转频率从例 7.5-1 公式（a）得

$$\frac{1}{f_1{}^2}=\frac{1}{1600^2}+\frac{1}{1745^2}，\quad f_1=1180\text{次/分}$$

例 7.5-5

图 7.5-2 示一根质量为 M 的匀质简支梁的基本频率等于 $\pi^2\sqrt{EI/Ml^3}$。如果一个集中质量m_0附加到 $x=l/3$ 的梁上，求新的基本频率。

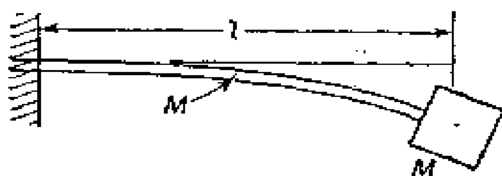


图 7.5-1

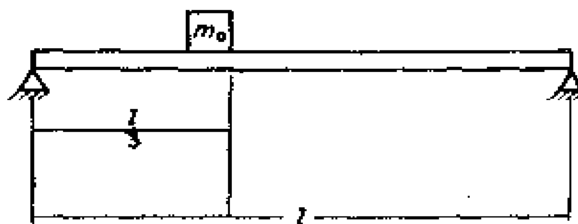


图 7.5-2

解：从例7.5-1方程（b）着手，我们设ω_{11}为匀质梁的基本频率，ω_1为带有附加质量 m_0 的梁上的新的基本频率。方程式（b）乘以$\omega_1{}^2$，我们得

$$1=\left(\frac{\omega_1}{\omega_{11}}\right)^2+a_{22}m_0\omega_{11}{}^2\left(\frac{\omega_1}{\omega_{11}}\right)^2$$

或者

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_{11}}\right)^2=\frac{1}{1+a_{22}m_0\omega_{11}{}^2}$$

量a_{22}是由于有单位载荷作用在 $x = l/3$ 处而在该点引起的影响系数。它能从例 7.4-4 梁的公式求到

$$a_{22} = \frac{8}{6 \times 81} \cdot \frac{l^3}{EI}$$

以 $\omega_{11}^2 = \pi^4 EI/Ml^3$ 以及 a_{22} 代入上式，我们就可得到一个简便的公式

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_{11}}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{8\pi^4}{6 \times 81} \frac{m_0}{M}} = \frac{1}{1 + 1.6 \frac{m_0}{M}}$$

7.6 矩阵迭代法

用刚度方程式或柔度方程式公式表示的运动方程式形式上是类同的。如有

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad (7.6\text{-}1)$$

式中的 λ，用于刚度公式以$1/\omega^2$表示，用于柔度公式以ω^2 表示。

迭代过程是这样进行的。起初对方程式（7.6-1)右边的列阵假定一组位移，执行指定的运算得出列阵的具体数值。然后使列阵标准化，即把其中一个位移简化为 1 并把列阵的其它每项都除以该位移值。以后重复使列阵标准化的过程直至位移项稳定成一定的标准。

将如第 7.7 节说明的那样，对于以柔度影响系数表示的方程式，迭代过程收敛于 λ 的最低值。于是振动的主振型或最低振型找到了。同样，对于以刚度影响系数为基础表示的方程式收敛于相应于 $\lambda = 1/\omega^2$ 的最低值的最高振型。

例 7.6-1

图 7.6-1 示的匀质梁在所示平面内自由振动，有集中质量为 $W_1 = 500$ 磅，$W_2 = 100$ 磅，求系统的基本频率。

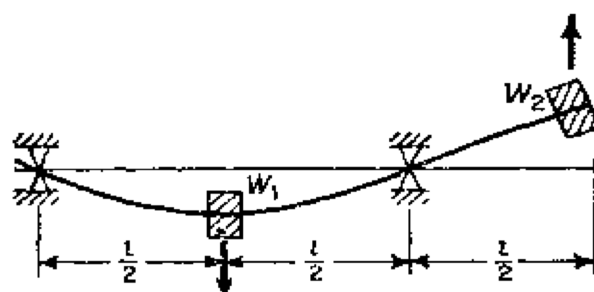


图 7.6-1

解：在位置1，2作用单位载荷，从梁的位移方程式可定出该题的影响系数为

$$a_{11}=\frac{l^3}{48EI}=\frac{1}{6}a_{22},\qquad a_{12}=a_{21}=\frac{l^3}{32EI}=\frac{1}{4}a_{22},$$

$$a_{22}=\frac{l^3}{8EI}$$

代入方程式（7.3-1）

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\frac{\omega^2 l^3}{8EIg}\begin{pmatrix} \frac{500}{6} & \frac{100}{4} \\ \frac{500}{4} & 100 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

右边的列阵先赋值于 $x_1=x_2=1.0$，我们得

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\frac{\omega^2 l^3}{8EIg}\begin{Bmatrix} 108.3 \\ 225.0 \end{Bmatrix}=\frac{108.3\omega^2 l^3}{8EIg}\begin{Bmatrix} 1.00 \\ 2.08 \end{Bmatrix}$$

以$x_1=1$，$x_2=2.08$重复迭代，第二解为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\frac{\omega^2 l^3}{8EIg}\begin{Bmatrix} 135.3 \\ 333.0 \end{Bmatrix}=\frac{135.3\omega^2 l^3}{8EIg}\begin{Bmatrix} 1.00 \\ 2.46 \end{Bmatrix}$$

多次重复上述过程，位移项将收敛于

$$\begin{Bmatrix} 1.00 \\ 2.60 \end{Bmatrix}=\frac{148.3\omega^2 l^3}{8EIg}\begin{Bmatrix} 1.00 \\ 2.60 \end{Bmatrix}$$

上述方程式当用 $g=386$英寸/秒^2 时，基本频率为

$$\omega=\sqrt{8EIg/148.3l^3}=4.56\sqrt{EI/l^3}$$

振幅比为

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1.0}{2.60}$$

如果只对基本频率感兴趣，从第一次及第二次迭代就能得到足够的精确度。第一次迭代两个惯性力为 $500\omega^2/g$ 及 $208\omega^2/g$。由第二次迭代得到的这些力产生的位移为 $x_1 = 135.3\omega^2 l^3/8EIg = 16.92\omega^2 l^3/EIg$ 及 $x_2 = 2.46x_1$。这些力所做的功为

$$U = \frac{1}{2}(500 + 208 \times 2.46)\frac{\omega^2}{g}x_1 = \frac{1}{2} \times 1012 \times \frac{\omega^2 x_1}{g}$$

相应的动能为

$$T = \frac{1}{2}(500 + 100 \times 2.46^2)\frac{\omega^2}{g}x_1^2 = \frac{1}{2} \times 1105 \times \frac{\omega^2 x_1^2}{g}$$

使两者相等，基本频率可找到为

$$\omega = \sqrt{\frac{1012 \times 386}{1105 \times 16.92}\frac{EI}{l^3}} = 4.57\sqrt{\frac{EI}{l^3}}$$

7.7 高次振型的计算

当利用柔度影响系数表示运动方程式时，迭代过程收敛于所设定的位移的最低振型。显然，如果在所假定的位移中最低振型不存在，迭代技巧将收敛于下一个最低振型或第二振型。

令所假定的曲线 X 由主振型 X_i 的和来表达

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \cdots \tag{7.7-1}$$

为了区别上述方程中的所假设的 X 和主振型 X_i 起见，我们将标记主振型为

$$X_i = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_i$$

所假定的曲线标记为

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix}$$

现在我们将利用条件 $C_1=0$ 从所设定的位移 X 消去第一振型。为此，用方程式(7.7-1)左乘 $X_1'M$ 项而引入正交关系式，这样将消去除第一项以外的右边各项。

$$X_1'MX=C_1X_1'MX_1 \qquad (7.7\text{-}2)$$

使上式左边等于零，则 C_1 变为零，于是从方程式(7.7-1)消去第一振型。

$$X_1'MX=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix}=0 \qquad (7.7\text{-}3)$$

$$=m_1x_1\bar{x}_1+m_2x_2\bar{x}_2+m_3x_3\bar{x}_3=0$$

由上式可得

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\bar{x}_2-\frac{m_3}{m_1}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)\bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 &= \bar{x}_3 \end{aligned} \qquad (7.7\text{-}4)$$

上述方程组中最后两式只是以相同值代入而已。以矩阵形式重写方程式 (7.7-4) 为

$$\{X\}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & -\frac{m_3}{m_1}\left(\frac{x_3}{x_1}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\{X\} \qquad (7.7\text{-}5)$$

$$=SX$$

由于这个方程式是条件 $C_1=0$ 的结果，所以第一振型可利用清除矩阵 S 从所假定的位移中除去。当该方程式代入原来矩阵方程式

$$X=\omega^2 aMX \qquad (7.7\text{-}6)$$

以后其结果为

$$X=\omega^2 aMSX \qquad (7.7\text{-}7)$$

方程式 (7.7-7) 应用迭代过程将收敛于第二振型。

对于第三振型和高次振型，重复清除过程，使 $C_1=C_2=0$ 等等。这样每进行一次，矩阵方程次数就降低一次；然而，如果清

除矩阵不纯，高次振型的收敛会变成更加困难了。利用原始矩阵方程式的逆阵校核最高振型这是个好办法，它应该等于依据刚度影响系数构成的方程式。

例 7.7-1

根据柔度影响系数写出图 7.7-1 所示系统的矩阵方程式，并求全部固有振型。

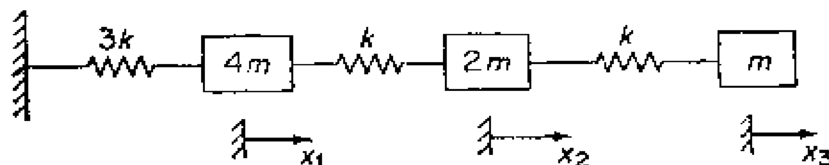


图 7.7-1

解：在位置 1，2，3 处，每次施加一单位载荷便可找出影响系数

$$a_{11}=a_{21}=a_{12}=a_{31}=a_{13}=\frac{1}{3k}$$

$$a_{22}=a_{32}=a_{23}=\left(\frac{1}{3k}+\frac{1}{k}\right)=\frac{4}{3k}$$

$$a_{33}=\frac{1}{3k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{7}{3k}$$

于是运动方程式矩阵形式如下

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\frac{\omega^2}{3k}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\frac{\omega^2 m}{3k}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

以 x_1，x_2，x_3 的任意值开始，上式收敛于第一振型

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\frac{\omega^2 m}{3k}14.32\begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0.79 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

因而找出基本频率为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{3k}{14.32m}}=0.457\sqrt{\frac{k}{m}}$$

为了求第二振型，我们用方程式（7.7-5）给出的方法构造一清除矩阵

$$S=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{0.79}{0.25}\right) & -\frac{1}{4}\left(\frac{1.00}{0.25}\right)\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1.58 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

根据方程式（7.7-6），第二振型迭代的新的方程式为

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\frac{\omega^2 m}{3k}\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 4 & 8 & 4\\ 4 & 8 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1.58 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{\omega^2 m}{3k}\begin{bmatrix}0 & -4.32 & 3.0\\ 0 & 1.67 & 0\\ 0 & 1.67 & 3.0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}$$

以任意幅度开始迭代，上述方程式收敛于第二振型

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\frac{\omega^2 m}{3k}3\begin{Bmatrix}-1.0\\0\\1.0\end{Bmatrix}$$

因此可找到第二振型的固有频率

$$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

为了求出第三振型，我们利用正交方程式（7.7-3）的条件 $C_1=C_2=0$

$$C_1=\sum_{i=1}^{3}m_i(x_i)_1\bar{x}_i=4(0.25)\bar{x}_1+2(0.79)\bar{x}_2+1(1.0)\bar{x}_3=0$$

$$C_2=\sum_{i=1}^{3}m_i(x_i)_2\bar{x}_i=4(-1.0)\bar{x}_1+2(0)\bar{x}_2+1(1.0)\bar{x}_3=0$$

从这两方程式可得

$$x_1=0.25\bar{x}_3,\qquad x_2=-0.79\bar{x}_3$$

用矩阵方程表示为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & -0.79 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix}$$

这个矩阵没有第一振型及第二振型，可作为第三振型的清除矩阵。把它代入到原始方程我们就得

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & -0.79 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix}$$

上述方程式导出第三振型方程

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k}\, 1.68 \begin{Bmatrix} 0.25 \\ -0.79 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

于是得到第三振型的固有频率

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{1.68m}} = 1.34\sqrt{\frac{k}{m}}$$

7.8 变换矩阵[1] (HOLZER-TYPE PROBLEMS)

在变换矩阵方法中，使一个大系统分为具有简单弹性和动力特性的子系统。公式用状态向量表示，状态向量包括由位移及内力组成的列阵；包含有子系统的动力特性的点阵，以及描述子系统的弹性特性的场矩阵。依照这些量，从系统的一端到另一端进行大量计算。则固有频率就可以根据满足合适的边界条件来确定。

弹簧-质量系统 图 7.8-1 表示从一个线性弹簧-质量系统分离出来的一部分。第 n 段由质量m_n，位移x_n，弹簧刚度k_n组成，k_n的两端部位移为x_n 及 x_{n-1}。当需要时，我们把左边元素用上标号标为 L，右边元素用上标号标为 R。

对于质量m_n，牛顿第二定律为

---

[1] E.C.Pestel and F.A.Leckie, *Matrix Methods in Elastomechanics* (New York: McGraw-Hill Book Co.,1963)

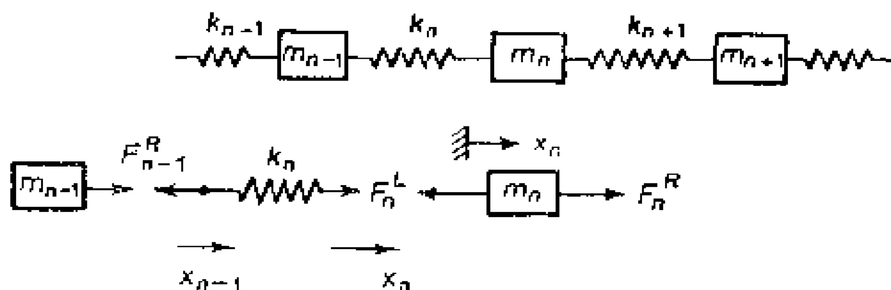


图 7.8-1

$$m_n\ddot{x}_n = F_n^R - F_n^L$$

对谐运动，则有

$$F_n^R = -\omega^2 m_n x_n + F_n^L \qquad (7.8\text{-}1)$$

因为m_n两端的位移相同，则得恒等式

$$x_n = x_n^R = x_n^L \qquad (7.8\text{-}2)$$

现在可把方程式(7.8-1)及(7.8-2)汇集到一个简单的矩阵方程中

$$\begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}_n^L \qquad (7.8\text{-}3)$$

式中$\begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}$就是**状态向量**，方阵即为点阵。

下一步研究弹簧k_n，它的端部力是相等的

$$F_{n-1}^R = F_n^L \qquad (7.8\text{-}4)$$

弹簧力与弹簧常数k_n的关系用下式表示

$$x_n^L - x_{n-1}^R = \frac{F_{n-1}^R}{k_n} \qquad (7.8\text{-}5)$$

方程式(7.8-4)及(7.8-5)现在可汇集成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}_{n-1}^R \qquad (7.8\text{-}6)$$

上面的方阵就是场矩阵。

把方程式(7.8-6)代入(7.8-3)，我们得到n处及$n-1$处间的数量联系

$$\begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}_n^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}_{n-1}^R \tag{7.8-7}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ -\omega^2 m & \left(1-\frac{\omega^2 m}{k}\right) \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}_{n-1}^R$$

由于 $n-1$ 处状态向量通过上面的方阵被变换成 n 处的状态向量，因此把它叫做 n 段**变换矩阵**。知道位置 1 处状态向量并选定ω^2值后，有可能逐步地计算出最后位置 n 的状态向量。根据边界条件，x_n或F_n能画成ω^2的函数曲线，当满足边界条件时就能确定系统的固有频率。这里只有一个位移同各自的质量联合在一起，这类问题称之为**霍尔寿**型问题。霍尔寿[1]发明了这类问题的列表方法，并把它应用到多质量扭转问题中去。

7.9 扭转系统

在旋转系统中符号常常是混乱的根源，有必要清楚地规定正值的含义。沿着转动轴的坐标向右设为正。横切转轴，外法线所在的面指向坐标的正方向则称之为正面。正向扭矩及正向角位移指的是按照右手螺旋法则，正面上的箭头指向正方向，如图 7.9-1 所示。

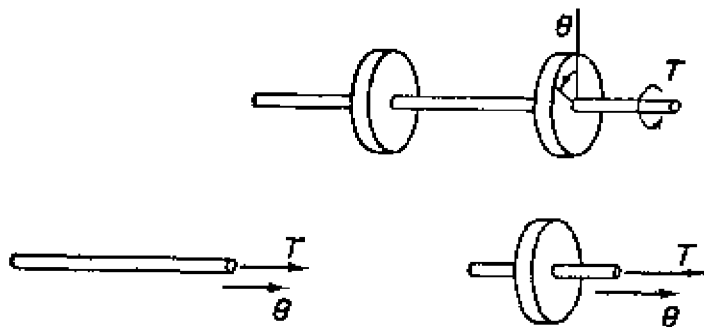


图 7.9-1

[1] H. HOlzer, *Die Berechnung der Drehschwingungen* (Berlin: Springer-Verlag, 1921)

有了这项规定，扭转系统变换矩阵的结论等同于状态向量为$\begin{Bmatrix}\theta\\T\end{Bmatrix}$的线性弹簧-质量系统。如图7.9-2我们分离出第$n$段，以点阵形式写出动力方程式以及以场矩阵形式写出弹性方程式。它们是

$$\begin{Bmatrix}\theta\\T\end{Bmatrix}_n^R=\begin{bmatrix}1 & 0\\-\omega^2J & 1\end{bmatrix}_n\begin{Bmatrix}\theta\\T\end{Bmatrix}_n^L \tag{7.9-1}$$

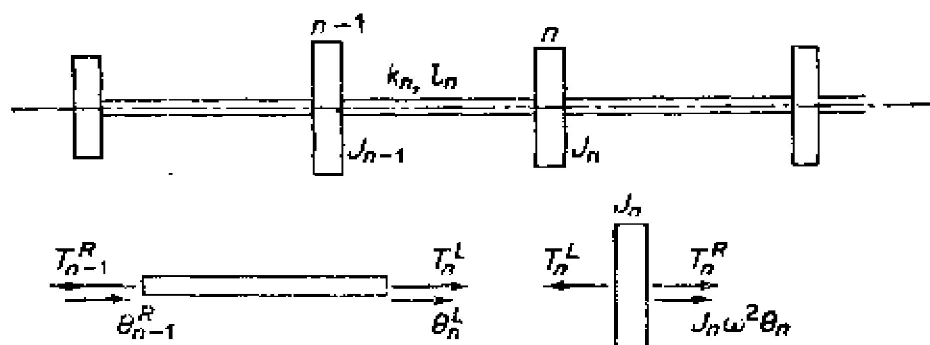


图 7.9-2

$$\begin{Bmatrix}\theta\\T\end{Bmatrix}_n^L=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\0 & 1\end{bmatrix}_n\begin{Bmatrix}\theta\\T\end{Bmatrix}_{n-1}^R \tag{7.9-2}$$

组合成

$$\begin{Bmatrix}\theta\\T\end{Bmatrix}_n^R\underset{\rightarrow}{=}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\-\omega^2J & \left(1-\frac{\omega^2J}{K}\right)\end{bmatrix}_n\begin{Bmatrix}\theta\\T\end{Bmatrix}_{n-1}^R \tag{7.9-3}$$

这样我们注意到方程式(7.9-1)，(7.9-2)及(7.9-3)的每个公式都是与线性弹簧-质量系统的那些公式等同的。

到目前为止，区段的编号数目是从左到右顺序增加，相应的变换矩阵亦是向右逐渐增加。方程式(7.8-7)和(7.9-3)等号下面的箭头指的就是这个方向的演进。某些问题中变换矩阵进行的方向与之相反，处理起来亦是方便的。在这种场合，我们只需要对方程式(7.8-7)或(7.9-3)逆转方向，便可得关系式

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_{n-1}^{R} \underset{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} \left(1-\dfrac{\omega^2 J}{K}\right) & -\dfrac{1}{K} \\ \omega^2 J & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_{n}^{R} \qquad (7.9\text{-}4)$$

现在箭头指的是变换矩阵逐渐自右向左顺着区段的数目改变。请学生从分离体着手，证明这个方程式。

例 7.9-1

求图 7.9-3 所示系统的固有频率和振型形状。

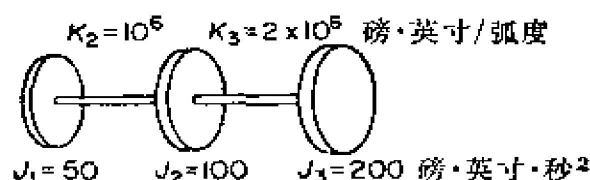


图 7.9-3

解： 从盘 1 的右面开始，状态向量为

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_{1}^{R} = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -50\omega^2 \end{Bmatrix}$$

位置 2 及位置 3 的状态向量为

$$\begin{pmatrix} \theta \\ T \end{pmatrix}_{2}^{R} = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-6} \\ -100\omega^2 & \left(1-\dfrac{100\omega^2}{10^{-6}}\right) \end{pmatrix}_{2} \begin{pmatrix} 1.0 \\ -50\omega^2 \end{pmatrix}_{1}$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ T \end{pmatrix}_{3}^{R} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\times 10^{-6} \\ -200\omega^2 & \left(1-\dfrac{200\omega^2}{2\times 10^{6}}\right) \end{pmatrix}_{3} \begin{pmatrix} \theta \\ T \end{pmatrix}_{2}^{R}$$

假定不同的ω值，于是便找到θ与T，先是位置 2 后是位置 3 。由于位置 3 是自由端，形成$T_3^R=0$的频率就是系统的固有频率。下面表格给出了三种ω 值情况下各个位置的状态向量，图 7.9-4 画的T_3^R 曲线指出，系统固有频率 为$\omega_1=126$ 弧度/秒，$\omega_2=210$ 弧度/秒。$\omega=126$及$\omega=210$时，扭矩T_3不是零，但很接近零，近似于$T_3=0$ 的情况。两个固有频率的振型形状亦表示于图7.9-5。

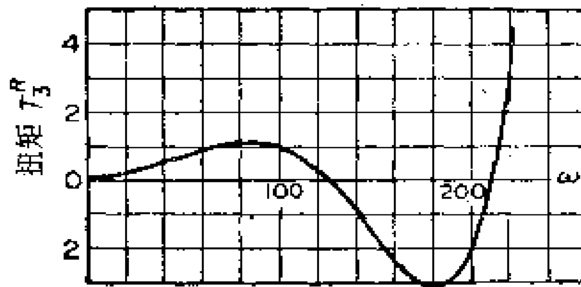


图 7.9-4

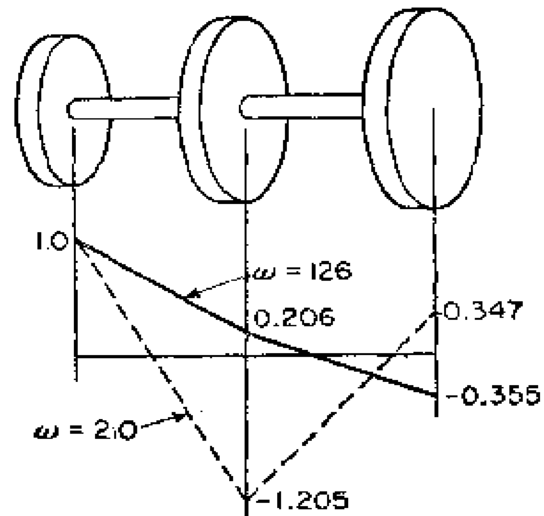


图 7.9-5

ω 弧度/秒	$\left\{\begin{matrix}\theta\\T\end{matrix}\right\}_1^R$	$\left\{\begin{matrix}\theta\\T\end{matrix}\right\}_2^R$	$\left\{\begin{matrix}\theta\\T\end{matrix}\right\}_3^R$
126	1.00 0.794×10^6	0.206 1.121×10^6	−0.355 -0.009×10^6
150	1.00 1.126×10^6	−0.126 0.842×10^6	−0.547 -1.618×10^6
210	1.00 2.205×10^6	−1.205 -3.104×10^6	0.347 -0.044×10^6

例 7.9-2 扭转问题的数字计算

对霍尔寿问题的数字计算机程序用图 7.9-6 的扭转系统来说明。该程序是这样设计的，只要改变某些数据就能适用于任何其它类型的扭转系统。

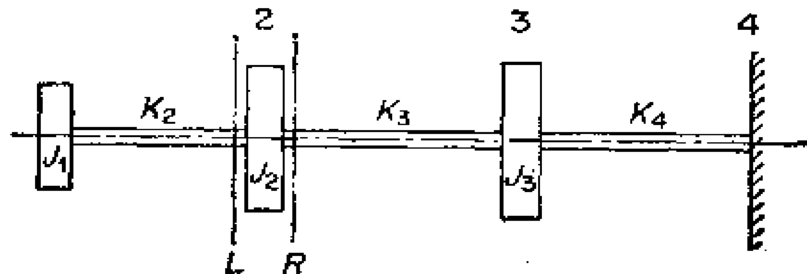


图 7.9-6

我们将用方程式(7.9-2)与(7.9-1)演算而不直接引用方程式(7.9-3)，它们是等效的。则有

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_{n+1}^{L} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{n+1} \begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_{n}^{R} \qquad (7.9\text{-}2)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_{n+1}^{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 \end{bmatrix}_{n+1} \begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_{n+1}^{L} \qquad (7.9\text{-}1)$$

写出程序，这些方程式为

$$\theta(I,N+1) = \theta(I,N) + TR(I,N)/K(N+1) \qquad (a)$$

$$TL(I,N+1) = TR(I,N) \qquad (b)$$

$$TR(I,N+1) = TL(I,N+1) - \lambda(I) * J(N+1) * \theta(I,N+1) \qquad (c)$$

式中 $\lambda = \omega^2$

TL = 圆盘左边的扭矩

TR = 圆盘右边的扭矩

下标号N规定顺着结构的位置，下标号 I 规定所用的频率。为了计算机程序的要求，有些代号要作改变以符 合 Fortran 语言。例如，刚度K及圆盘的惯性矩 J 要分别改为 SK 和 SJ，θ要写出它的名称，等。

利用上面三个方程式就可解结构上各点N在不同的λ值下的θ和TR。在固有频率下，固定端处的θ必定是零值。

选择初值 ω及增量$\Delta\omega$能对频率范围加以仔细研究。例如本题中我们选择频率

$$\omega = 40,\ 60,\ 80,\ \cdots 620。$$

能编成程序

$$\omega(I) = 40 + (I-1) * 20, \qquad I = 1至30$$

相应的 $\lambda(I)$ 可用下式计算

$$\lambda(I) = \omega(I) ** 2$$

初始边界条件

$$\theta(I,1) = 1$$

$$TR(I,1) = -\lambda(I) * J(1)$$

公式(a)，(b)，(c)是在I(或频率)保持不变下对结构每一点N进行计算。直到$N=4$，I按整数进到下一个频率，再重复上述过程。这些操作从图 7.9-7 流程框图中可清楚地看到。

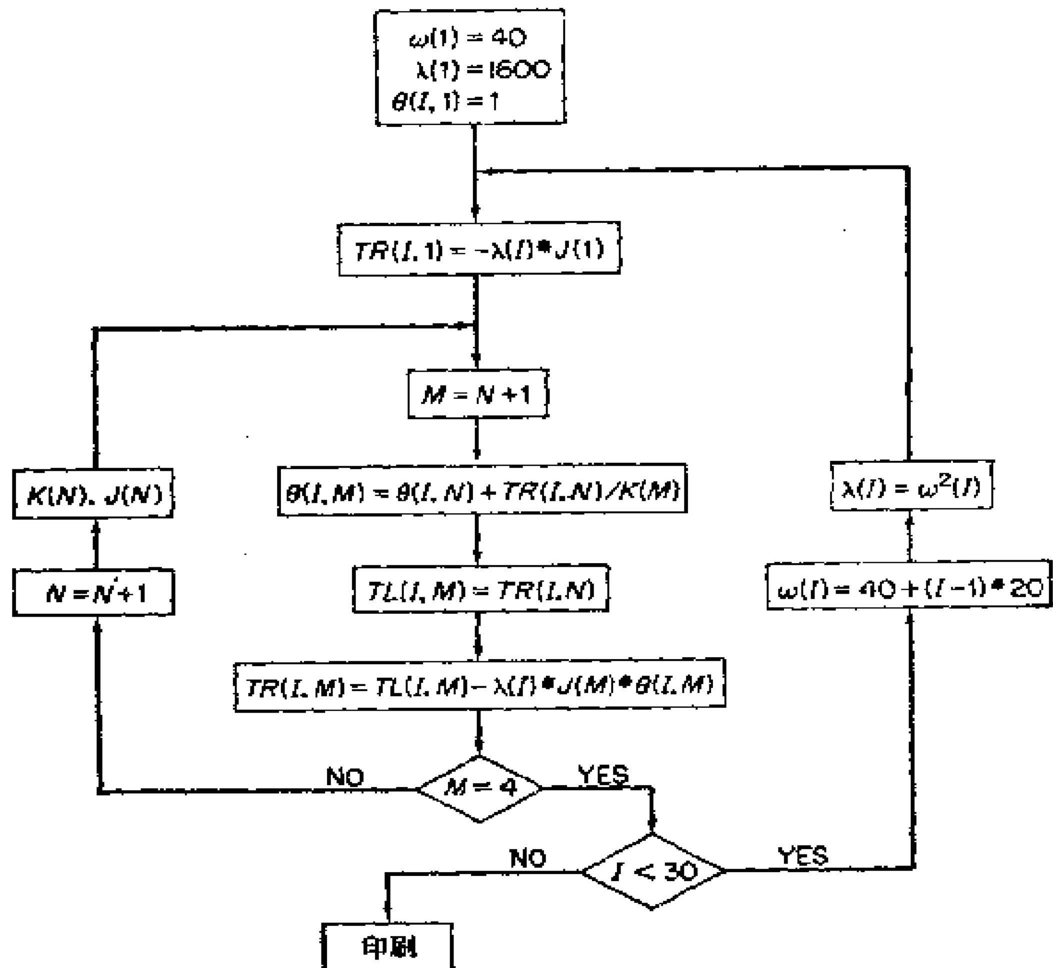


图 7.9-7　扭转问题流程框图

计算结果记在下面。图7.9-8就是角度θ_4与ω的关系曲线。系统的固有频率是相应于θ_4等于零的点，从图 7.9-8 可看出，它们是

$$\omega_1 = 160$$

$$\omega_2 = 256$$

$$\omega_3 = 552$$

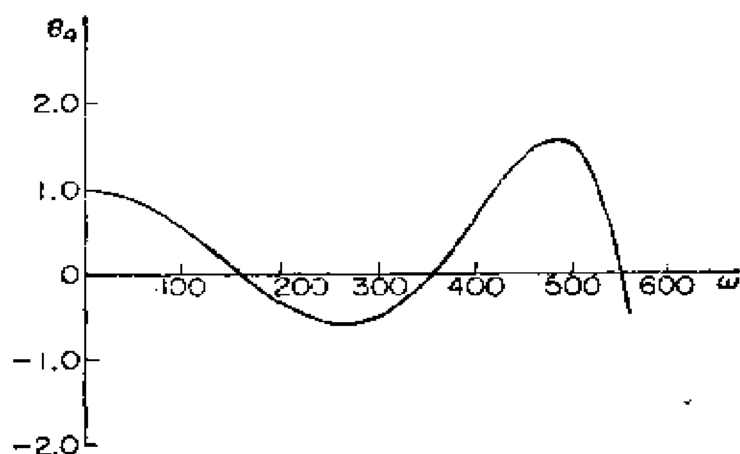


图 7.9-8　对应于$\theta_4=0$的固有频率

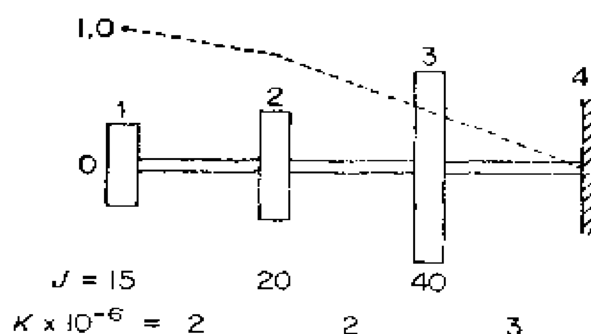


图 7.9-9　$\omega_1=160$时振型形状

当$\omega_1=160$各点的θ_i 表示在图7.9-9。

阻尼系统　当包括阻尼时，变换矩阵的形式是不改变的，但是质量和刚度的元素将变成复数。写出图7.9-10所示第 n 个子系统的方程式就能很容易地说明这一点。圆盘 n 的扭矩方程式为

$$-\omega^2 J_n\theta_n = T_n^R - T_n^L - i\omega c_n\theta_n$$

或者

$$(i\omega c_n - \omega^2 J_n)\theta_n = T_n^R - T_n^L \tag{7.9-5}$$

第 n 段轴的弹性方程式

$$\begin{aligned} T_n^L &= K_n(\theta_n - \theta_{n-1}) + i\omega g_n(\theta_n - \theta_{n-1}) \\ &= (K_n + i\omega g_n)(\theta_n - \theta_{n-1}) \end{aligned} \tag{7.9-6}$$

由此阻尼系统的点阵和场矩阵变成

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (i\omega c - \omega^2 J) & 1 \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_n^L \tag{7.9-7}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_n^L = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{(K + i\omega g)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_n \begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}_{n-1}^R \tag{7.9-8}$$

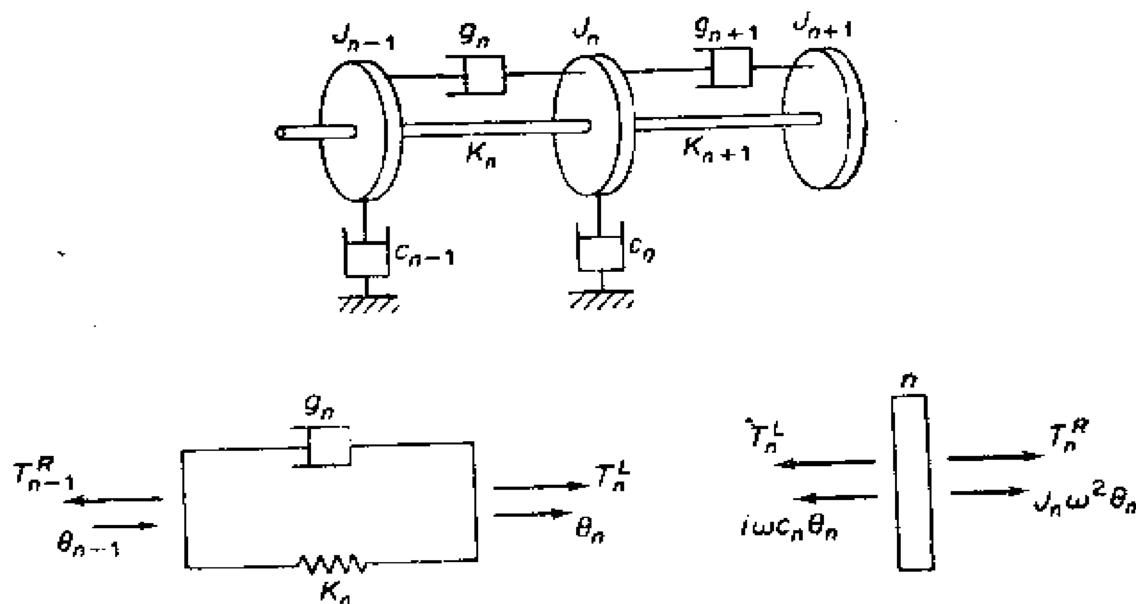


图 7.9-10 阻尼扭转系统

除质量和刚度元素外，上述矩阵与无阻尼情况是等同的。现在这些质量及刚度元素是复数。

例 7.9-3

图 7.9-11 的扭转系统，在圆盘 4 的右侧处以一谐振扭矩激励。求扭矩-频率曲线和系统的一次振型固有频率。

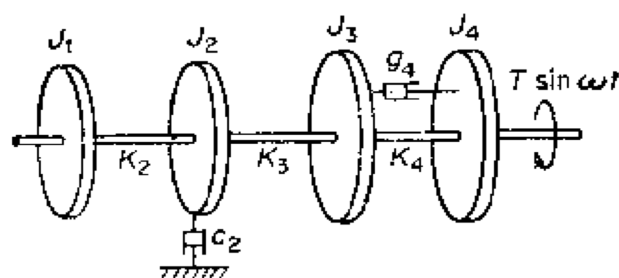


图 7.9-11

$$J_1 = J_2 = 500 \text{ 磅英寸·秒}^2$$
$$J_3 = J_4 = 1000 \text{磅英寸·秒}^2$$
$$K_2 = K_3 = K_4 = 10^6 \text{ 磅英寸/弧度}$$
$$c_2 = 10^4 \text{ 磅英寸·秒/弧度}$$
$$g_4 = 2\times 10^4 \text{ 磅英寸·秒/弧度}$$

解： 第一附表中表示$\omega^2 = 1000$的数字计算。第一表列了对各个区段 n 的复质量和复刚度项。把它们代入到点阵和场矩阵即方程式(7.9-7)及(7.9-8)，便找到各区段的复振幅和复扭矩，如第二附表。

n	$(\omega^2 J_n - i\omega c_r)10^{-6}$	$(K_n + i\omega g_n)10^{-6}$
1	$0.50+0.0i$	
2	$0.50-0.316i$	$1.0+0.0i$
3	$1.0+0.0i$	$1.0+0.0i$
4	$1.0+0.0i$	$1.0+0.635i$
n	θ_n	T_n^R ($\omega^2=1000$时)
1	$1.0+0.0i$	$(0.50+0.0i)\times 10^6$
2	$0.50+0.0i$	$(0.750+0.158i)\times 10^6$
3	$-0.250+0.158i$	$(0.50+0.0i)\times 10^6$
4	$-0.607+0.384i$	$(-0.107+0.384i)\times 10^6$

给出适当的频率数目，重复上述计算，画出图7.9-12的扭矩-频率曲线。

曲线指出T_4^R的实数部分和虚数部分以及它们的合成，它就是本题的激励扭矩。例如，对$\omega^2 = 1000$合扭矩为$10^6\sqrt{0.107^2+0.384^2} = 0.394\times 10^6$ 磅英寸。从图可以找到系统的第一固有频率接近于$\omega = \sqrt{930} = 30.5$ 弧度/秒，这里固有频率是根据无阻尼系统的频率计算，这种系统在没有扭矩时也能维持运动。

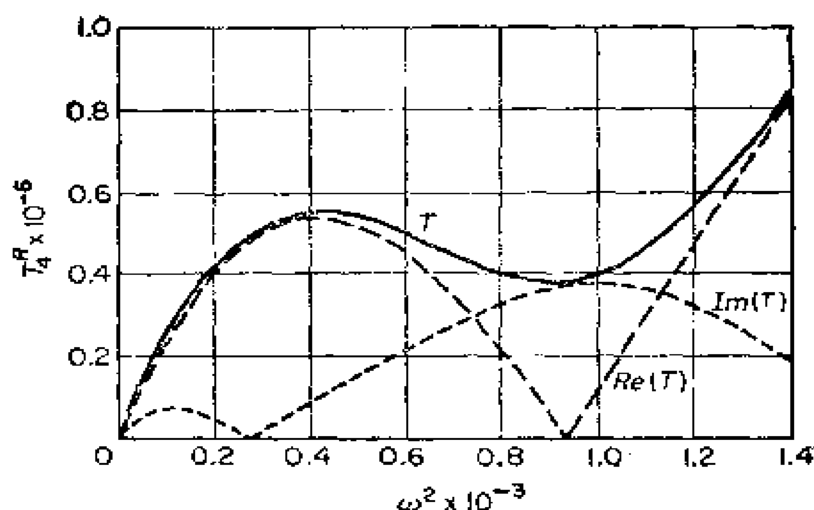


图 7.9-12　图7.9-11的阻尼扭转系统的扭矩-频率曲线

例 7.9-4

如图7.9-11，如果$T=2000$磅英寸，$\omega=31.6$弧度/秒．求第二个圆盘的振幅。

解： 上表指明扭矩为394000磅·英寸时将产生$\theta_2=0.5$弧度的振幅。由于振幅正比于扭矩，故给定扭矩情况下第二圆盘的振幅为

$$0.5\times\frac{2}{394}=0.00254 \text{ 弧度。}$$

7.10　齿轮系统

考虑图7.10-1传递扭转的系统，轴 2 对轴 1 的速比为n。这个系统可简化成下面的等效单轴系统。

以轴 2 的速度等于$\dot{\theta}_2=n\dot{\theta}_1$，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}J_2n^2\dot{\theta}_1^2 \tag{7.10-1}$$

因而圆盘 2 相对于轴 1 的等效惯矩为n^2J_2。

为了确定轴 2 相对于轴 1 的等效刚度，攫紧圆盘 1 及 2，对齿轮 1 施加扭矩，使它转动角θ_1，则齿轮 2 将转过$\theta_2=n\theta_1$，这也将是轴 2 的转角。于是系统的势能则为

$$U=\frac{1}{2}K_1\theta_1^2+\frac{1}{2}K_2n^2\theta_1^2 \tag{7.10-2}$$

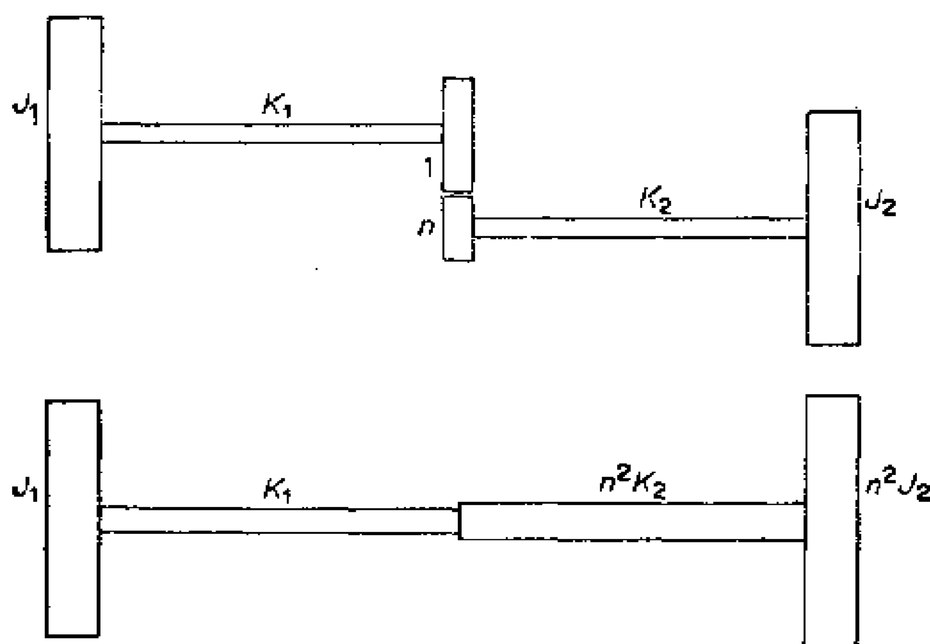


图 7.10-1 齿轮系统和等效单轴系统

轴 2 相对于轴 1 的等效刚度为n^2K_2。

因此齿轮系统的规则十分简单：把齿轮轴的全部刚度和惯性矩乘以n^2，此处n为齿轮轴到参考轴的速比。

7.11 分叉系统

分叉系统常常会碰到；某些通例如：船舶装置的双螺旋桨系统，汽车驱动轴及差动系统，如图7.11-1所示。

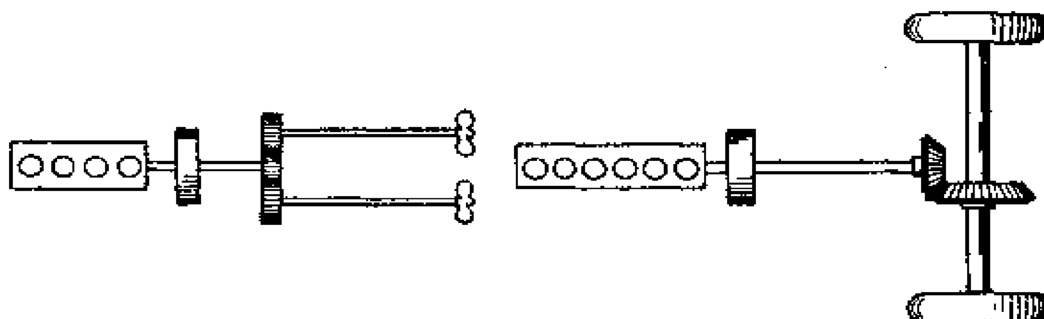


图 7.11-1 扭矩分流系统例

这种系统能简化成图7.11-2所示的一对一的机构，并对分叉

系统全部惯性矩和刚度乘以它们的速度比的平方。

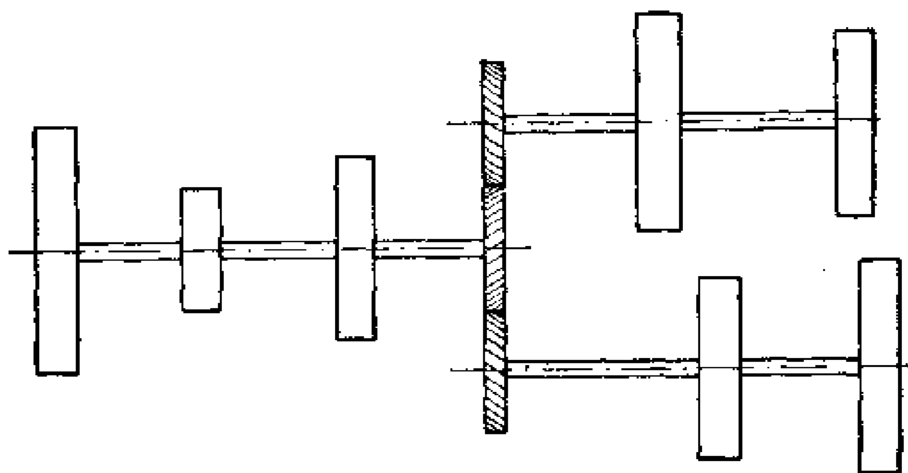


图 7.11-2 用一对一机构简化为相同速度的分叉系统

例 7.11-1

略述图7.11-3示扭转分叉系统求解的矩阵方法。

解： 首先我们把分叉B的刚度和惯性矩乘以n^2，从而把系统转化成为一对一机构，如图7.11-3(b)所示。然后我们进行从位置0到位置3的运算，注意齿轮B是以T_B^R，作用在齿轮A上。

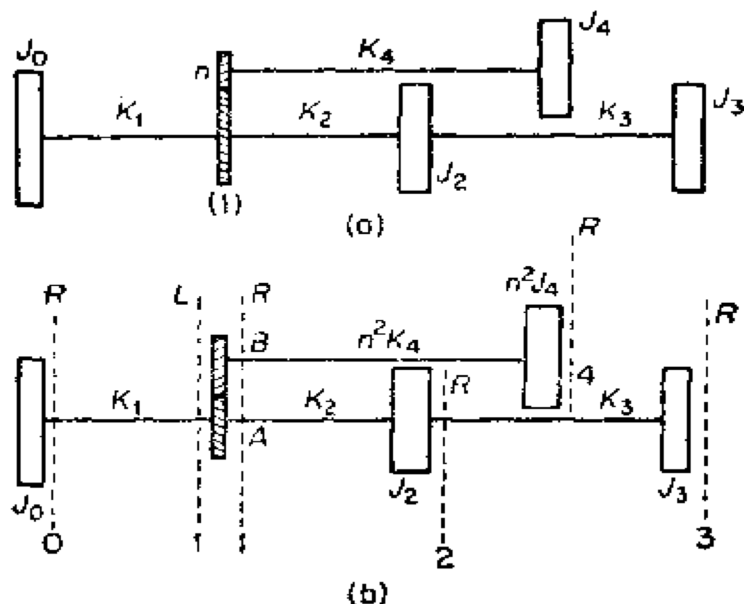


图 7.11-3 分叉系统和简化系统

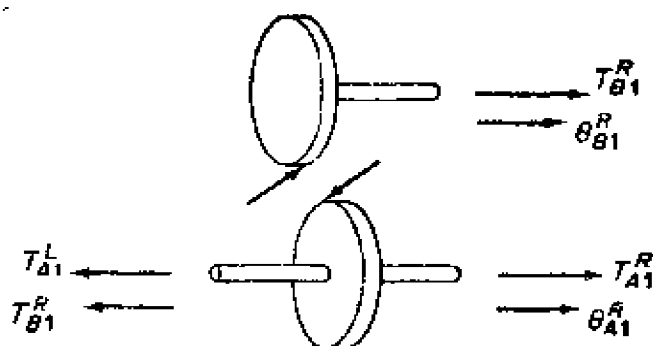


图 7.11-4

图7.11-4表示两个齿轮的分离体图。T^R_{B1}表示正向扭矩，齿轮B对齿轮A施加的扭矩是负的，如图示。齿轮A上扭矩处于平衡为

$$T^R_{A1} = T^L_{A1} + T^R_{B1} \tag{7.11-1}$$

我们现在要用轴A的角位移θ_1来表示T^R_{B1}。

运用方程式（7.9-4）并注意$T^R_{B4}=0$，则对B轴有

$$\begin{Bmatrix} \theta_B \\ T_B \end{Bmatrix}^R_1 = \begin{pmatrix} \left(1-\dfrac{\omega^2 n^2 J_4}{n^2 K_4}\right) & -\dfrac{1}{n^2 K_4} \\ \omega^2 n^2 J_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ 0 \end{Bmatrix}^R_4 \tag{7.11-2}$$

由于$\theta^R_{B1} = -\theta^L_{A1} = -\theta^R_{A1}$，可得

$$\theta^R_{B1} = \left(1-\frac{\omega^2 J_4}{K_4}\right)\theta^R_{B4} = -\theta^L_{A1} \tag{7.11-3}$$

$$T^R_{B1} = \omega^2 n^2 J_4 \theta^R_{B4} \tag{7.11-4}$$

消去θ^R_{B4}

$$T^R_{B1} = \frac{-\omega^2 n^2 J_4}{\left(1-\dfrac{\omega^2 J_4}{K_4}\right)}\theta^L_{A1} \tag{7.11-5}$$

以方程式（7.11-5）代入方程式（7.11-1），并联机构轴A的变换关系为

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ T_A \end{Bmatrix}_1^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-\omega^2 J_A}{\left(1-\dfrac{\omega^2 J_A}{K_A}\right)} & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ T_A \end{Bmatrix}_1^L \qquad (7.11\text{-}6)$$

现在可以按通常的方法沿着轴A从$1R$到$3R$进行运算。

7.12 梁

当一根梁代换以若干集中质量并用无质量的梁联系的模型时，可用N.O.迈克列斯特[1]方法逐步计算从一个位置到下一个位置的位移，转角，弯矩，剪力，它类似于霍尔寿方法。另外，从计算的简便和效能来看，这些方程式以矩阵形式表达是有利的。

（*a*）非耦合型弯曲振动　图7.12-1表示具有集中质量的理想梁上一个典型区段。

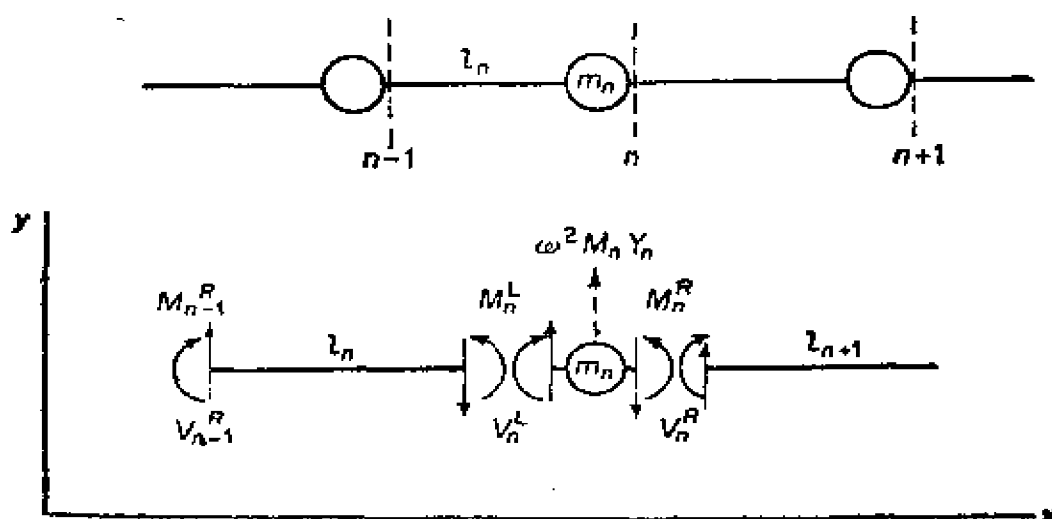


图 7.12-1　具有集中质量的理想梁

研究第n段，作用在质量和梁断面上的力和弯矩用分离体图表

[1] N.O.Myklestad, "A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams", *Jour. Aero. Sci.* (APril 1944), pp.153-62.

示。从分离体图可得剪力和弯矩方程式如下

$$M_n^L = M_n^R \qquad V_{n-1}^R = V_n^L$$
$$V_n^L = V_n^R - \omega^2 m_n y_n \qquad M_{n-1}^R = M_n^L - V_n^L l_n \tag{7.12-1}$$

第 n 个梁区段的弹性变形，用图7.12-2表示。从而端部的位移和转角与力的关系如下

$$y_n = y_{n-1} + l_n\theta_{n-1} + M_n^L \frac{l_n^2}{2(EI)_n} - V_n^L \frac{l_n^3}{3(EI)_n}$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \frac{M_n^L l_n}{(EI)_n} - \frac{V_n^L l_n^2}{2(EI)_n} \tag{7.12-2}$$

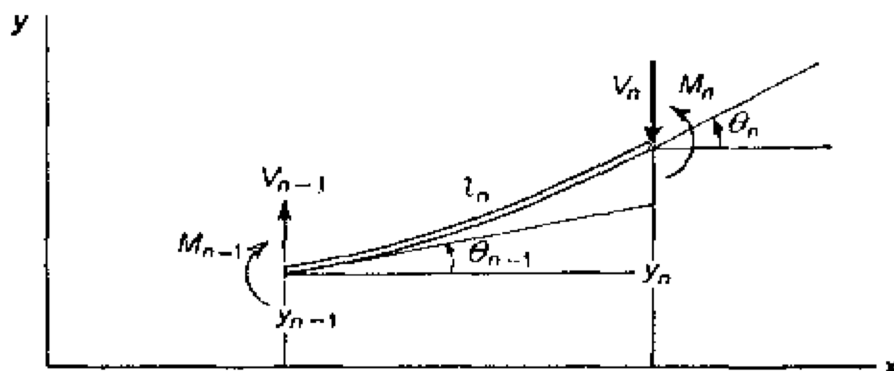


图 7.12-2 梁区段的弹性变形

这里所采用的不同影响系数是根据均匀梁段，它们是

（1） n 段梁的转角（相对于$n-1$处的斜率）

$= \dfrac{l}{EI}$ 由 n 处单位弯矩引起的

$= \dfrac{l^2}{2EI}$ 由 n 处单位剪力引起的

（2） n 段梁的位移（从$n-1$处作切线度量）

$= \dfrac{l^2}{2EI}$ 由 n 处单位弯矩引起的

$= \dfrac{l^3}{3EI}$ 由 n 处单位剪力引起的

在方程式（7.12-2）中的M_n，V_n与M_{n-1}，V_{n-1}的关系式可根据方程式（7.12-1）求得。这些方程式可改写成

$$y_n = y_{n-1} + l_n\,\theta_{n-1} + \frac{M^R_{n-1} l_n^2}{2(EI)_n} + \frac{V^R_{n-1} l_n^3}{6(EI)_n} \quad (7.12\text{-}3)$$

$$\theta_n = 0 + \theta_{n-1} + \frac{M^R_{n-1} l_n}{(EI)_n} + \frac{V^R_{n-1} l_n^2}{2(EI)_n}$$

$$M^L_n = 0 + 0 + M^R_{n-1} + V^R_{n-1} l_n$$

$$V^L_n = 0 + 0 + 0 + V^R_{n-1}$$

用场矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^L_n = \begin{pmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_n \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^R_{n-1} \quad (7.12\text{-}4)$$

对质量m_n点，我们有

$$y^R_n = y^L_n \qquad M^R_n = M^L_n$$

$$\theta^R_n = \theta^L_n \qquad V^R_n = V^L_n + \omega^2 m_n y^L_n$$

这就导出点阵

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_n \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^L_n \quad (7.12\text{-}5)$$

以方程式（7.12-4）代入方程式（7.12-5）的右边列阵内便得到联系状态向量n和$n-1$的最后方程式

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_n \begin{pmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_n \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^R_{n-1}$$

$$
\underset{\rightarrow}{=}
\begin{bmatrix}
1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{6EI} \\
0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\
0 & 0 & 1 & l \\
\omega^2 m & \omega^2 ml & \dfrac{\omega^2 ml^2}{2EI} & 1+\omega^2 m\dfrac{l^3}{6EI}
\end{bmatrix}_n
\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{n-1}^{R}
\qquad (7.12\text{-}6)
$$

对于任何频率ω，方程式（7.12-6）使我们能够从左边的边界0起运算到右边的边界N，这些线性相关的量用方程式表示为

$$
\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_N =
\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\
u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\
u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\
u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_O
\qquad (7.12\text{-}7)
$$

一般地说，两端的边界条件总是已知的，因此满足这些条件的频率就是梁的固有频率。

例 7.12-1

一根左部固定的悬臂梁，用几个集中质量描述。求能导出固有频率的边界条件。

解：位置0，$y_0=0$，$\theta_0=0$，从方程式（7.12-7）我们得到

$$M_N = u_{33}M_0 + u_{34}V_0$$

$$V_N = u_{43}M_0 + u_{44}V_0$$

式中M_0和V_0是未知的，M_N和V_N一定是零。如果方程式的行列式为零就满足边界条件，或者

$$
\begin{vmatrix}
u_{33} & u_{34} \\
u_{43} & u_{44}
\end{vmatrix} = 0
$$

可以把这个值画成ω的函数曲线，从而确定梁的固有频率。

（b）旋转梁　这一节我们将研究旋转梁垂直于旋转平面的振动，如螺旋桨和透平叶片。由于有离心力，我们将需要考虑这

个附加项加到前节梁的分析中。

离心力垂直于转动轴，如图7.12-3所示。质量为m_n，离心力等于$m_n\Omega^2x_n$。因而必须引进附加的量是轴向力

$$F_n^L = F^R + m_n\Omega^2 x_n \qquad (7.12\text{-}8)$$

式中

$$F_n^L = \sum_{i=1}^{N} m_i\Omega^2 x_i \qquad (7.12\text{-}9)$$

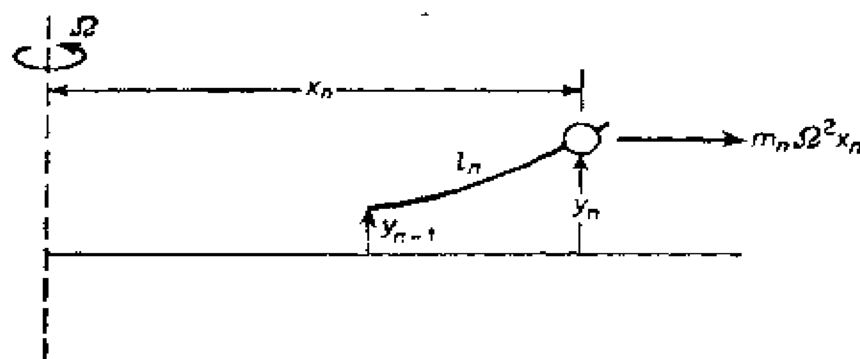


图 7.12-3 旋转梁上的离心力

由于这些项，弯矩方程式改为

$$M_{n-1}^R = M^L - V^L l - F_n^L(y_n^L - y_{n-1}^R)$$

位移和转角亦受到F_n^L的影响，我们只计及F_n^L垂直于梁的那部分作为切力考虑

$$y_n^L = y_{n-1}^R + l_n\theta_{n-1}^R - \theta_n^L F_n^L \frac{l_n^3}{3(EI)_n} + $$

$$+ M_n^L \frac{l_n^2}{2(EI)_n} - V_n^L \frac{l_n^3}{3(EI)_n}$$

$$\theta_n^L = \theta_{n-1}^R + \frac{M_n^L l_n}{(EI)_n} - \frac{V_n^L l_n^2}{2(EI)_n} - \frac{\theta_n^L F_n^L l_n^2}{2(EI)_n}$$

这些方程式现在能整理成从右向左进行的计算式如下

$$y_{n-1}^R = y_n^L - \theta_n^L\left\{ l_n + \frac{F_n^L l_n^3}{6(EI)_n}\right\} + M_n^L \frac{l_n^2}{2(EI)_n} - V_n^L \frac{l_n^3}{6(EI)_n}$$

$$\theta^R_{n-1}=\theta^L_n\left[1+\frac{F^L_n l^2_n}{2(EI)_n}\right]-M^L_n\frac{l_n}{(EI)_n}+V^L_n\frac{l^2_n}{2(EI)_n}$$

$$M^R_{n-1}=M^L_n\left[1+\frac{F^L_n l^2_n}{2(EI)_n}\right]-V^L_n\left[l_n+\frac{F^L_n l^3_n}{6(EI)_n}\right]-$$

$$-\theta^L_n F^L_n\left[l_n+\frac{F^L_n l^3_n}{6(EI)_n}\right]$$

$$V^R_{n-1}=V^L_n$$

整理成矩阵形式，这些方程式就成为

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^R_{n-1} \underset{\leftarrow}{=} \begin{bmatrix} 1 & -\left(l+\dfrac{Fl^3}{6EI}\right) & \dfrac{l^2}{2EI} & -\dfrac{l^3}{6EI} \\ 0 & \left(1+\dfrac{Fl^2}{2EI}\right) & -\dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & -F\left(l+\dfrac{Fl^3}{6EI}\right) & \left(l+\dfrac{Fl^2}{2EI}\right) & -\left(l+\dfrac{Fl^3}{6EI}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^L_n$$

(7.12-10)

算题时，我们需要用质量m_n的点阵

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^R_n \qquad (7.12\text{-}11)$$

把它代入方程式（7.9-10）的右边列阵，最后的结果为

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^R_{n-1} \underset{\leftarrow}{=} \begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{m\omega^2 l^3}{6EI}\right) & -\left(l+\dfrac{Fl^3}{6EI}\right) & \dfrac{l^2}{2EI} & -\dfrac{l^3}{6EI} \\ -\dfrac{m\omega^2 l^2}{2EI} & \left(1+\dfrac{Fl^2}{2EI}\right) & -\dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ m\omega^2\left(l+\dfrac{Fl^3}{6EI}\right) & -F\left(l+\dfrac{Fl^3}{6EI}\right) & \left(1+\dfrac{Fl^2}{2EI}\right) & -\left(l+\dfrac{Fl^3}{6EI}\right) \\ -m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^R_n$$

(7.12-12)

（c）弯曲-扭转耦合振动　机翼和其它梁结构振动的固有振型常常是弯曲-扭转耦合振型。对于这些振动的高次振型来说，与去耦振型比较有相当大的不同。为了处理这类问题，有必要引进一个附加影响系数h_n。h_n定义为在n处作用有单位扭矩情况下，n位置相对于$n-1$位置的扭转角。图7.12-4所示梁区段，有关扭矩的方程式为

$$T_n^R - T_n^L = J_n\varphi_n + m_n c_n \ddot{y}_n = -J_n\omega^2\varphi_n - m_n c_n \omega^2 y_n$$

$$\varphi_n^L - \varphi_{n-1}^R = T_n^L h_n$$

$$\varphi_n^R = \varphi_n^L$$

式中$J_n = J_{ncg} + m_n c_n^2$是第$n$段梁相对于梁的弹性轴的惯性矩。质量两端的剪力为

$$V_n^L - V_n^R = -m_n\omega^2(y_n + c_n\varphi_n)$$

m两端的点阵可写成

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ \varphi \\ T \end{Bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 & m\omega^2 c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -mc\omega^2 & 0 & 0 & 0 & -J\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ \varphi \\ T \end{Bmatrix}_n^L \tag{7.12-13}$$

$(n-1)R$和（n）L两位置之间的场矩阵同方程式（7.12-4）一样，但加上两个附加方程式

由此以方程式（7.12-14）代入到方程式（7.12-1）右边列阵，便建立（n）R的状态向量同（$n-1$）R处状态向量间的联系。

例7.12-2

图7.12-5表示战斗机机翼和机身在弯曲-扭转振动时质量离散化情形。试找出为求解对称的弯曲-扭转振型时的边界方程。

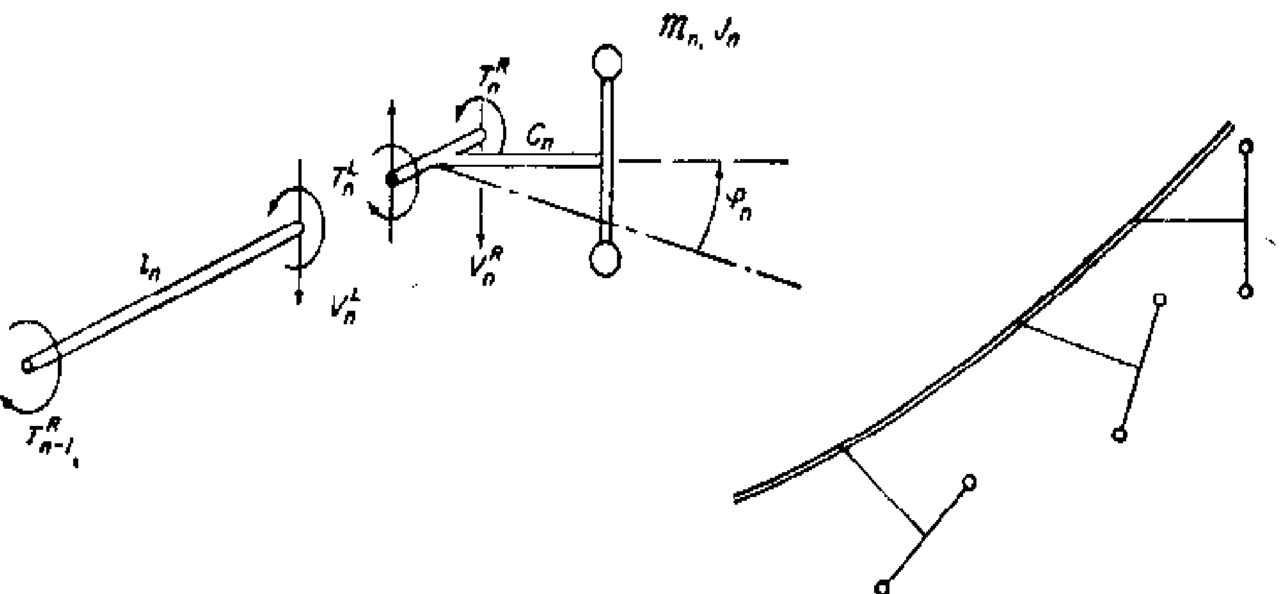


图 7.12-4

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ \varphi \\ T \end{Bmatrix}_n^L = \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_n \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ \varphi \\ T \end{Bmatrix}_{n-1}^R \quad (7.12\text{-}14)$$

解：为了使用矩阵方程式（7.12-14），我们设飞机中心线为 0，并令机身质量的一半及机身相对于弹性轴的质量惯性矩的一半为 m_1及J_1，$l_1 = 0$。取机翼翼尖处为 7 区，$m_7 = 0$，$l_7 = 0$，这样可使列矩阵$[\ ]_7^L$变为$[\ ]_6^R$。

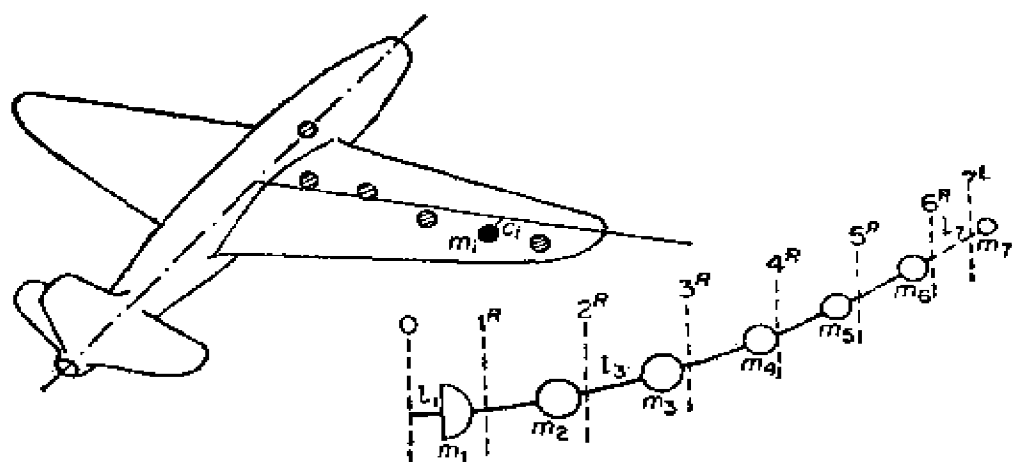


图 7.12-5

对于对称振型，在中心线处弯曲转角θ_0^R，剪力V_0^R及弯扭扭矩T_0^R都是零值，而翼尖处弯矩，剪力和扭矩亦为零值。于是从方程式（7.12-14）得边界方程式为

$$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ M \\ V \\ - \\ T \end{Bmatrix}_7^L = \begin{bmatrix} & & \\ & u_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ 0 \\ M \\ 0 \\ \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_0^R$$

它可改写成

$$\begin{Bmatrix} M \\ V \\ T \end{Bmatrix}_7^L = \begin{bmatrix} u_{31} & u_{33} & u_{35} \\ u_{41} & u_{43} & u_{45} \\ u_{61} & u_{63} & u_{65} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ M \\ \varphi \end{Bmatrix}_0^R$$

中心线处 y_0，M_0 及 φ_0 的数值是未知的；但是在翼尖处的弯矩，剪力，扭矩等左边列阵为零值。由此为了满足边界条件，作为 ω 函数的 u_{ij} 的行列式必须为零值。

把下列量

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} u_{31} & u_{33} & u_{35} \\ u_{41} & u_{43} & u_{45} \\ u_{61} & u_{63} & u_{65} \end{vmatrix}$$

画成与 ω 有关的曲线，可找到对称振型的固有频率。固有频率找到后振型的形状也可由计算 y_n，θ_n 及 φ_n 而得到。图7.12-6表示一种特种战斗机的第二次对称振型的典型等值曲线。

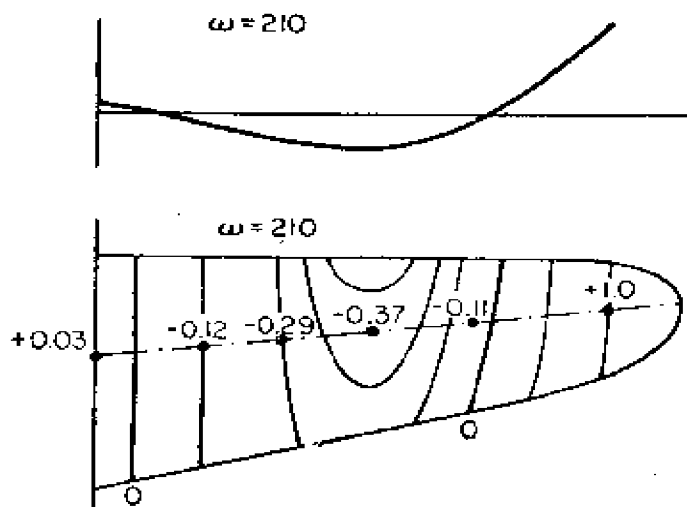


图 7.12-6

7.13 重复结构和变换矩阵

前面章节的变换矩阵当应用于具有重复性的相同区段时将引出某些重要的结果。应该指出不管系统是否是阻尼的，变换矩阵的行列式都等于1。下列三种情况用来证实上述的说法。情况1，附图7.13-1。

$$\begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \left(1-\dfrac{\omega^2 m}{k}\right) & -\omega^2 m \\ \dfrac{1}{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_{n-1} \qquad (7.13\text{-}1)$$

它和状态向量转换方程式(7.8-7)相同。情况2，附图7.13-2。

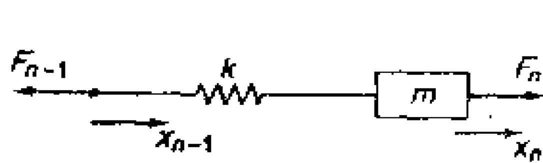


图 7.13-1

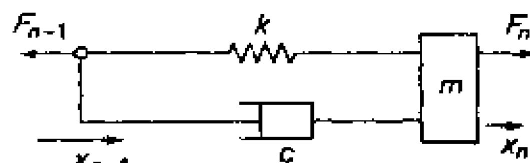


图 7.13-2

$$\begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \left(1-\dfrac{\omega^2 m}{k+i\omega c}\right) & -\omega^2 m \\ \dfrac{1}{k+i\omega c} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_{n-1} \qquad (7.13\text{-}2)$$

情况3，附图7.13-3。

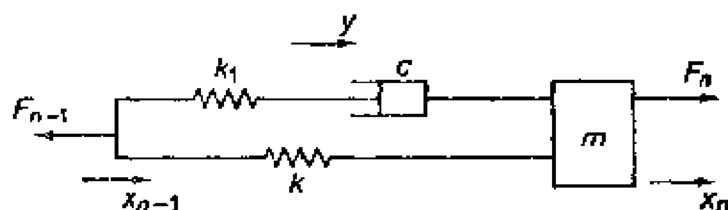


图 7.13-3

$$\begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \left(1 - \dfrac{\omega^2 m[k_1 + i\omega c]}{kk_1 + i\omega c(k_1 + k)}\right) & -\omega^2 m \\ \dfrac{k_1 + i\omega c}{kk_1 + i\omega c(k_1 + k)} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_{n-1}$$

(7.13-3)

上述方程式中，中间坐标y会被消去。

上述三种情况的每一种，变换矩阵都是这种形式

$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (7.13\text{-}4)$$

行列式$AD - BC = 1.0$。甚至梁区段的变换矩阵(即方程式(7.12-6))，4×4矩阵的行列式亦是1，这是很容易证明的。

当系统有n个相同的分段，变换矩阵方法导出方程式

$$\begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_n = [T]^n \begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_0 \quad (7.13\text{-}5)$$

由此得到一个重要方法，能算出变换矩阵的第n次幂。做法是初定矩阵$[T]$的特征值μ和特征向量ξ，但不要和前面讨论过的系统的固有频率和振型形状搞混。

矩阵$[T]$的特征值和特征向量满足方程

$$[T]\{\zeta\} - \mu\{\zeta\} = 0 \quad (7.13\text{-}6)$$

对于$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，特征值可以从下列特征方程找到

$$\begin{vmatrix} (A-\mu) & B \\ C & (D-\mu) \end{vmatrix} = 0 \quad (7.13\text{-}7)$$

由于$AD - BC = 1$，故得

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(A + D) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(A + D)^2 - 1} \quad (7.13\text{-}8)$$

特征向量只能按它的比值来确定

$$\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)_1 = \frac{B}{\mu_1 - A} = r_1$$

$$\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)_2 = \frac{B}{\mu_2 - A} = r_2 \quad (7.13\text{-}9)$$

下一步我们构造特征向量列阵为振型矩阵 P

$$[P]=\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.13\text{-}10)$$

两个方程式

$$[T]\{\zeta\}=\mu\{\zeta\}$$

对 μ_1 及 μ_2 来说，现在可汇集成单一矩阵方程（亦可参考方程式(6.10-16)）

$$[T][P]=[P][\Lambda] \qquad (7.13\text{-}11)$$

式中 $[\Lambda]=\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$= 特征值的对角矩阵。

右乘以$[P]^{-1}$，我们得

$$[T]=[P][\Lambda][P]^{-1}$$

上述方程式的平方为

$$[T]^2=[T][T]=[P][\Lambda][P]^{-1}[P][\Lambda][P]^{-1}$$
$$=[P][\Lambda]^2[P]^{-1}$$

式中 $[\Lambda]^2=\begin{bmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{bmatrix}$

重复相乘导出第 n 次幂

$$[T]^n=[P][\Lambda]^n[P]^{-1} \qquad (7.13\text{-}12)$$

对方程式应用边界条件

$$\begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_n=[T]^n\begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_0=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F \\ x \end{Bmatrix}_0$$

例如，如果 0 端是固定的，n 端是自由端，$x_0=0$，$F_n=0$，我们得出

$$0=t_{11}F_0$$

因为 $F_0\neq0$，从 $t_{11}=0$ 能找到固有频率。在有阻尼情况下，变换矩阵的元素是复数。这种情况下，端部位移可选为 1，力 F_0 从下式找出

$$1=t_{21}F_0$$

7.14 差分方程

差分方程对重复型相同分段问题，提供了另一种近似方法。作为重复分段例子，考虑图7.14-1所示的N层建筑物，其中每一层地板的质量为m，地板与地板间每分段的侧向刚度或剪切刚度为K磅/英寸。于是第n个质量的运动方程式为

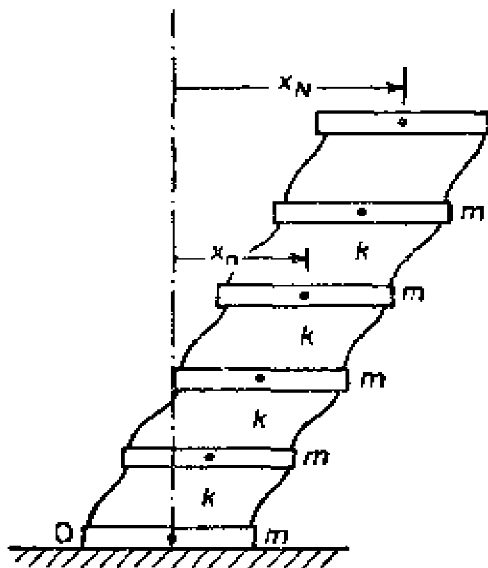


图 7.14-1 用差分方程分析重复结构

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}) \qquad (7.14\text{-}1)$$

对谐运动，它可用振幅表示为

$$X_{n+1} - 2\left(1 - \frac{\omega^2 m}{2k}\right)X_n + X_{n-1} = 0 \qquad (7.14\text{-}2)$$

代入下式

$$X_n = e^{i\beta n} \qquad (7.14\text{-}3)$$

即可找到方程式的解。它将引出如下关系式

$$\left(1 - \frac{\omega^2 m}{2k}\right) = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} = \cos\beta$$

$$\frac{\omega^2 m}{k} = 2\,(1 - \cos\beta) = 4\sin^2\frac{\beta}{2} \qquad (7.14\text{-}4)$$

X_n的通解为

$$X_n = A\cos\beta n + B\sin\beta n \tag{7.14-5}$$

式中 A 与 B 由边界条件给定。在基础处，$n=0$，幅度 $X_0=0$，因此$A=0$。顶层处$n=N$，运动方程式为

$$m\ddot{x}_N = -k(x_N - x_{N-1})$$

用振幅表示则为

$$X_{N-1} = \left(1 - \frac{\omega^2 m}{k}\right)X_N \tag{7.14-6}$$

把通解代入上式，得下列估算β的关系式

$$\sin\beta(N-1) = [1 - 2(1-\cos\beta)]\sin\beta N$$

简化为乘积形式

$$2\cos\beta\left(N + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} = 0 \tag{7.14-7}$$

下列条件可满足上式

$$\cos\beta\left(N+\frac{1}{2}\right)=0,\quad \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2(2N+1)},\ \frac{3\pi}{2(2N+1)},\ \frac{5\pi}{2(2N+1)}\cdots \tag{7.14-8}$$

因此固有频率可由方程式（7.14-4）得到如下

$$\omega = 2\sqrt{k/m}\,\sin\frac{\beta}{2} \tag{7.14-9}$$

这样导得

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\frac{\pi}{2(2N+1)}$$

$$\omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\frac{3\pi}{2(2N+1)}$$

$$\vdots$$

$$\omega_N = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\frac{(2N-1)\pi}{2(2N+1)}$$

图7.14-2表示当$N=4$时这组固有频率的图解关系。

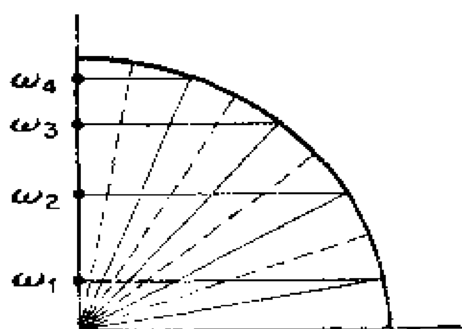


图 7.14-2 $N=4$时一个重复结构的固有频率

这里列举的差分方程法广泛应用在具有重复分段的许多其它动力系统中。固有频率总是由方程式（7.14-9）给出；当然对于每个问题的β值必须根据边界条件给定。

习　　题

7-1　试建立图P.7-1所示系统的如下形式的矩阵方程：

$$\{\theta\} = \omega^2[a][J]\{\theta\}\ 。$$

7-2　求图P.7-2所示弹簧-质量系统的影响系数。

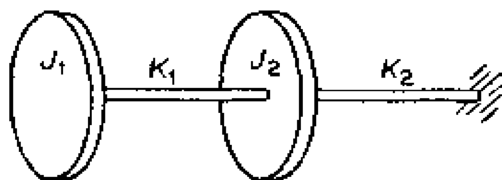


图 P.7-1

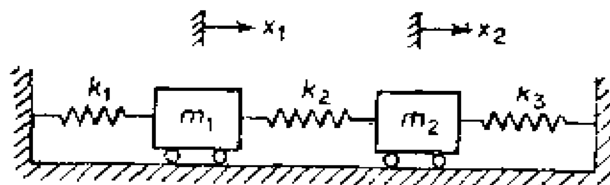


图 P.7-2

7-3　写出题7-2系统的动能和势能表达式，当

$$k_1=k,\ \ m_1=m,$$
$$k_2=3k,\ \ m_2=2m$$
$$k_3=2k,$$

利用动能和势能相等，定出ω^2的方程式。令$x_2/x_1=n$，画出ω^2-n曲线。取出ω^2的最大值，最小值以及相应的n值，说明它们代表着系统的两个固有振型。

7-4　求图P.7-4所示双质量悬臂梁的影响系数，并写出以矩阵形式表示的运动方程式。

7-5　具有相同刚度为k磅/英寸的三根弹簧。一端互相连结着，另一端彼此呈120°对称布置，如图P.7-5所示。试证明弹簧结点在与任一弹簧夹角为θ的方向的影响系数与θ角无关，而且等于$1/1.5k$。

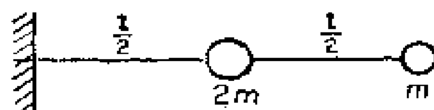


图 P.7-4

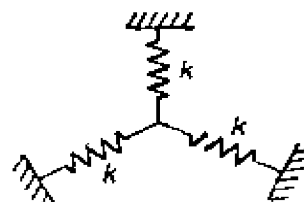


图 P.7-5

7-6　求图P.7-6所示三个摆的影响系数。

7-7　求图 P.7-7所示三个自由度的弹簧-质量系统的影响系数。

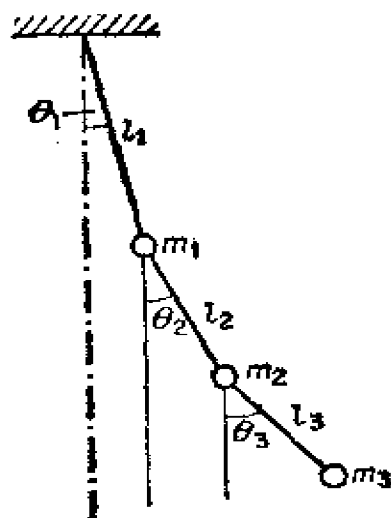


图 P.7-6

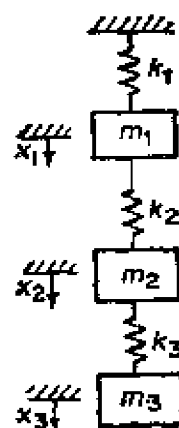


图 P.7-7

7-8　证明图P.7-8所示三个圆盘两根轴的扭转系统的频率方程式为

$$\omega^4-\left[\frac{K_1}{J_1}+\frac{K_2}{J_2}\left(1+\frac{K_1}{K_2}+\frac{J_2}{J_3}\right)\right]\omega^2+\frac{K_1}{J_1}\frac{K_2}{J_2}\left(\frac{J_1+J_2+J_3}{J_3}\right)=0$$

7-9　推导一个包含有三个质量两根弹簧的线性弹簧-质量系统的频率方程式，并与题7-8的结果比较。

7-10 图 P.7-10 所示为一个螺旋桨、径向活塞发动机和特级变换装置的等效扭转系统。利用矩阵公式求出两个固有频率。

7-11 求图 P.7-11所示一架飞机的简化模型的固有振型，其中 $M/m=n$，长度为 l 的梁是均匀的。

7-12 利用瑞利法，估算出图P.7-12所示集中质量系统的基本频率，

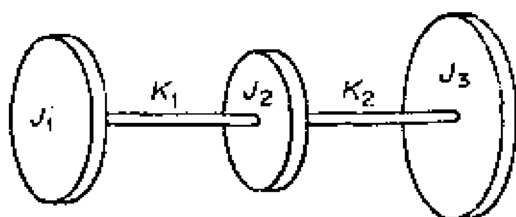


图 P.7-8

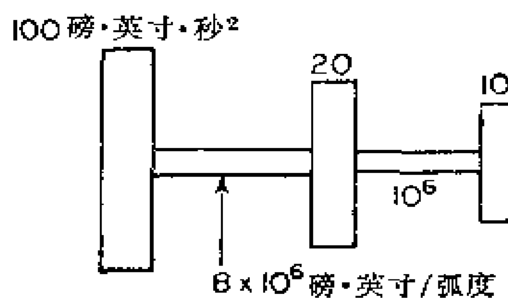


图 P.7-10



图 P.7-11

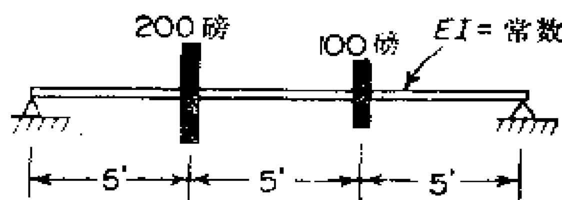


图 P.7-12

7-13 算出图P.7-13所示集中质量的悬臂梁的基本频率。

7-14 一根质量为M，刚度为$K=EI/l^3$的匀质梁，如图 P.7-14所示，支承在总垂直刚度为K磅/英寸的两根相同的弹簧上。利用瑞利法并给定位移 $y_{max}=\sin(\pi x/l)+b$，证明频率方程式为

$$\omega^2=\frac{2k}{M}\left(\frac{\frac{K}{k}\frac{\pi^4}{4}-\frac{b^2}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{4b}{\pi}+b^2}\right)$$

用$\partial\omega^2/\partial b=0$，证明最低频率产生于

$$b=-\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{K\pi^4}{2k}\right)\pm\sqrt{\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{K\pi^4}{2k}\right)\right]^2+\frac{\pi^4K}{2k}}$$

时。

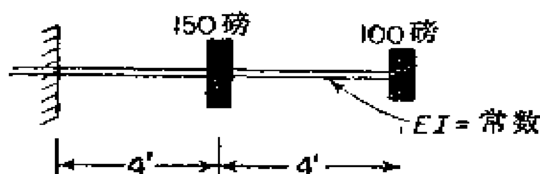


图 P.7-13

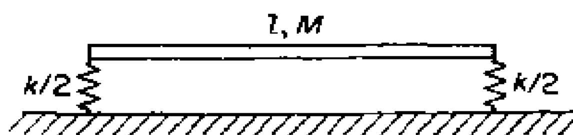


图 P.7-14

7-15 利用方程式(7.4-3)，求题7-12的集中质量梁的基本频率。

7-16 利用方程式(7.4-9)，求题7-12系统的固有频率。

7-17 利用邓克列公式，求图P.7-17所示三质量悬臂梁的基本频率。

7-18 利用邓克列公式，求图P.7-18所示的梁的基本频率。

$$W_1 = W,\ W_2 = 4W,\ W_3 = 2W$$

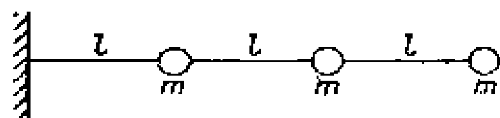


图 P.7-17

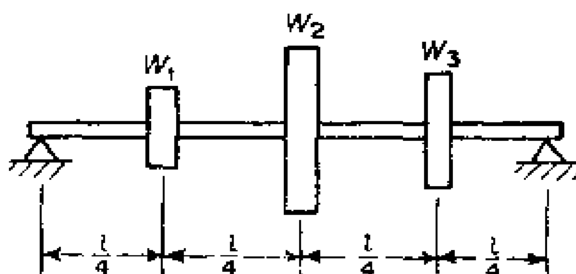


图 P.7-18

7-19 一架战斗机的翼尖处作用有一个100磅的载荷，产生相应的位移0.78英寸。如果机翼的基本弯曲频率为622次/分，当一个320磅的油箱(包括燃油)加到翼尖处，试近似确定新的弯曲频率。

7-20 一给定的梁在跨中装有重量为12磅的偏心重量振动器激振，谐振频率为435周/秒。倘若加上一附加重量10磅，谐振频率降低到398周/秒，求梁的固有频率。

7-21 求题7-10系统的两个固有振型，并说明它们是正交的。

7-22 求题7-13的悬臂梁的主振型，并证明它们的正交性。

7-23 题7-7系统，若

$$k_1 = 3k,\quad m_1 = 4m,$$
$$k_2 = k,\quad m_2 = 2m,$$
$$k_3 = k,\quad m_3 = m$$

列出矩阵方程式，并用迭代法求三个主振型。校验所得振型的正交性。

7-24 利用邓克列公式，计算题7-23的基本频率，并与矩阵迭代的结果比较。

7-25 求图P.7-18所示梁当$W_1 = W_2 = W_3$时，梁的三个主振型。用邓克列公式校验基本频率。

7-26 试证明邓克列公式导出的基本频率总是低于真实频率。

7-27 利用霍尔寿矩阵方法，求图P.7-27所示扭转系统的头两个固有频率和

主振型。J，K有下列数值

$$J_1=J_2=J_3=10\text{磅英寸}\cdot\text{秒}^2$$

$$J_4=20\text{磅英寸}\cdot\text{秒}^2$$

$$K_1=K_2=1.5\times10^6\text{磅英寸/弧度}$$

$$K_3=2.0\times10^6\text{磅英寸/弧度}$$

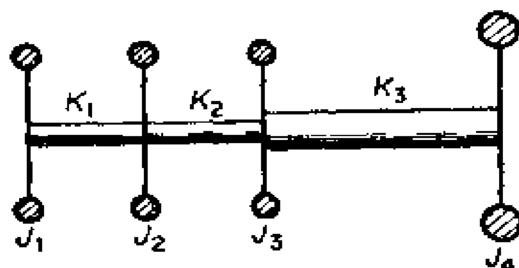
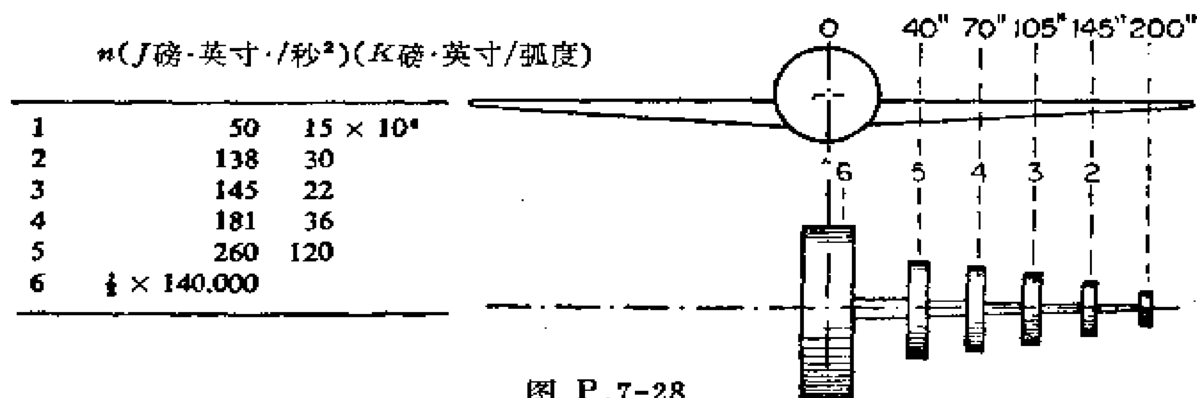


图 P.7-27

7-28 为了使用霍尔寿分析法，一架战斗机机翼简化成一系列圆盘和轴，如图P.7-28 所示。求机翼对称和反对称扭转振动的头两个固有频率，并画出相应的扭转振型表。



n	(J磅·英寸·/秒²)	(K磅·英寸/弧度)
1	50	15×10^6
2	138	30
3	145	22
4	181	36
5	260	120
6	$\frac{1}{2}\times140{,}000$	

图 P.7-28

7-29 如果在例7.9-1所示系统的圆盘 3 上加有 $\omega=150$ 弧度/秒的谐振扭矩 10000磅英寸，求每个圆盘的振幅和位相。

7-30 图P.7-30 所示带有扭转阻尼器的扭转系统，求系统的扭矩-频率曲线。

7-31 例7.9-3，图 7.9-11 系统当圆盘 4 上加有扭矩 0.04×10^6 磅英寸时，求$\omega^2=600$时每个圆盘的振幅和位相。

7-32 图 P.7-32 所示为质量 1 及 2 间设有阻尼器的线性系统。按教师指定

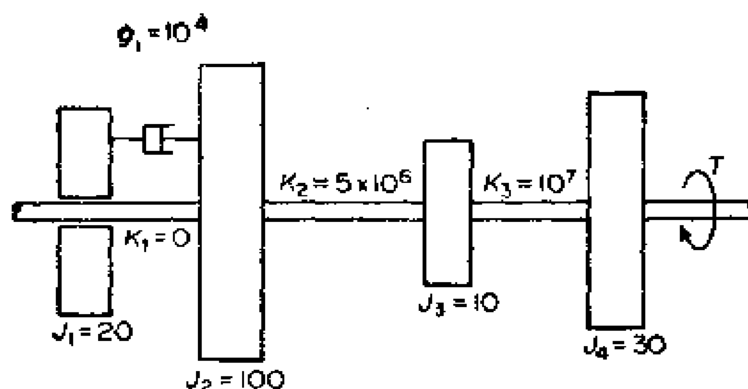


图 P.7-30

的数值进行计算机分析，并求出在某特定频率下，各质量的振幅和位相。

7-33 求图 P.7-33所示齿轮系统的等效扭转系统，并找出它的固有频率。

7-34 若题 7-33 小齿轮和大齿轮有下列惯性矩，$J'=2$，$J''=6$，求等效单轴系统和固有频率。

7-35 求图 P.7-35 所示扭转系统的两个最低固有频率，其J，K及n有下列

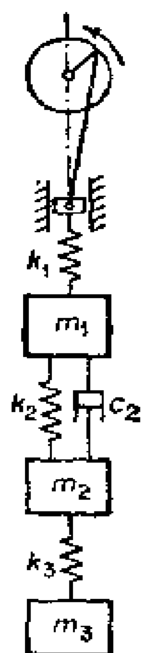


图 P.7-32

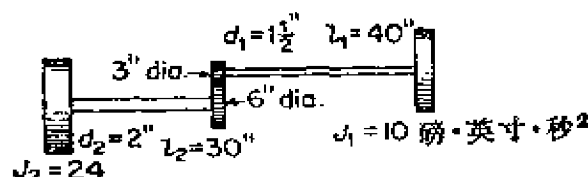


图 P.7-33

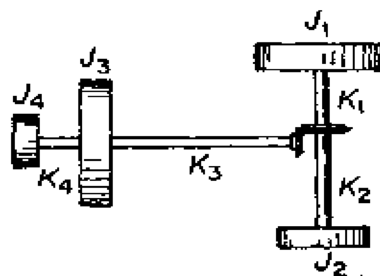


图 P.7-35

数值

$J_1 = 15$磅英寸・秒^2　　$K_1 = 2\times10^6$磅英寸/弧度

$J_2 = 10$磅英寸・秒^2　　$K_2 = 1.6\times10^6$磅英寸/弧度

$J_3 = 18$磅英寸・秒^2　　$K_3 = 1\times10^6$磅英寸/弧度

$J_4 = 6$ 磅英寸・秒^2　　$K_4 = 4\times10^6$磅英寸/弧度

驱动轴对车轮轴的速比为4:1。问在固有频率下，J_2对J_1的振幅比为多少?

7-36 把图 P.7-36(*a*)所示的汽车扭转系统简化成(*b*)的等效扭转系统。必要的数据给定如下

每个后轮　$J = 9.2$磅英寸・秒^2

飞轮　　　$J = 12.3$磅英寸・秒^2

传动速比(从驱动轴到发动机轴) = 1:3

差动速比(轴到驱动轴) = 1:3.5

轴的尺寸　直径 = $1^1/_4$英寸，长度 = 25英寸(两边)

驱动轴尺寸　直径 = $1^1/_2$英寸，长度 = 74英寸

汽缸间曲柄轴的刚度由实验测定 = 6.1×10^6磅英寸/弧度

汽缸 4 和飞轮间曲柄轴的刚度 = 4.5×10^6磅英寸/弧度。

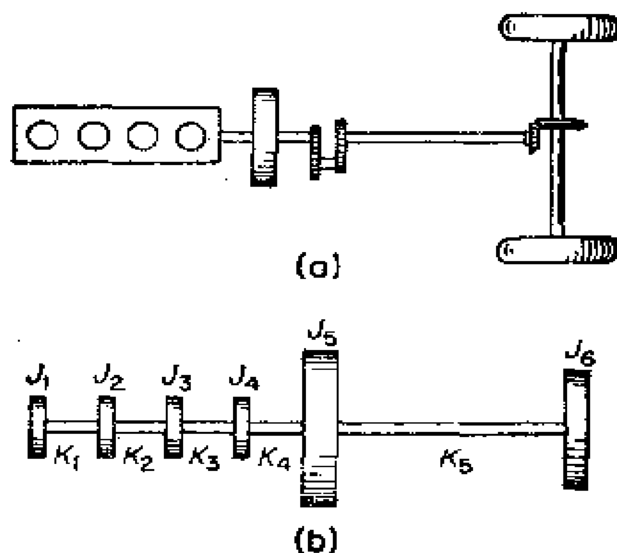


图 P.7-36

7-37 假设题7-36每个汽缸的$J = 0.2$磅英寸・秒^2，求系统的固有频率。

7-38 求图 P.7-38所示扭转系统的运动方程式，并整理成矩阵形式。解出振

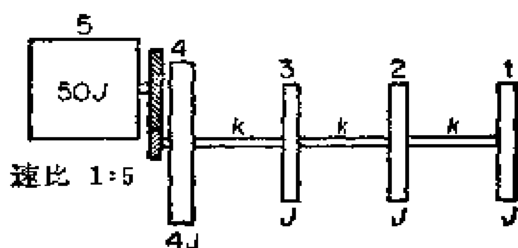


图 P.7-38

荡的主振型。

7-39 对长度为 l，端部质量为m的悬臂梁说明应用矩阵方法可直接导出固有频率方程式。

7-40 对带有两个相等质量，相等间距为 l 的悬臂梁，应用矩阵方法，说明边界条件处转角、位移均为零值时导出的方程式为

$$\theta_1=\frac{\frac{1}{2}m\omega^2lK\left(5+\frac{1}{6}m\omega^2l^2K\right)}{1+\frac{1}{2}l^2Km\omega^2}=\frac{1+\frac{3}{2}m\omega^2l^2K+\left(\frac{1}{6}m\omega^2l^2K\right)^2}{2l+\frac{1}{6}m\omega^2l^3K}$$

式中 $K=l/EI$

从上述关系式求得频率方程式并确定两个固有频率。

7-41 题 7-39 的梁绕着通过固定端的轴以角速度为Ω旋转，请用第 7.12 节 (b) 的方法求解。

7-42 利用第7.12节 (a) 的方法，求题7-17悬臂梁的固有频率。

7-43 从边界方程式(7.12-7)，试建立一简支梁的边界行列式$D(\omega)$。

7-44 求一个两端固定梁的边界行列式$D(\omega)$。

7-45 求一端固定，另一端铰支梁的边界行列式$D(\omega)$。

7-46 求一端铰支，一端自由梁的边界行列式$D(\omega)$。

7-47 一根转动梁，例如直升飞机的叶片，有时可假定为销插在毂体中。请建立这种情况的边界行列式$D(\omega)$。

7-48 假定一直升飞机叶片用三个等间距的集中质量来代替，在轮毂端部被夹紧。根据弯曲刚度为常数，求转动速度为Ω时的固有频率。

7-49 求图P.7-49所示系统的弯曲-扭转振动。

7-50 利用矩阵公式建立图 P.7-50 所示系统对称和反对称弯曲振型的边界条件。画出边界行列式同频率 ω 的关系曲线，以确定固有频率，绘制头两个振型形状。

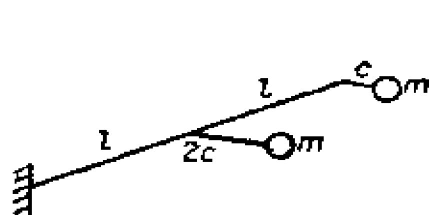


图 P.7-49

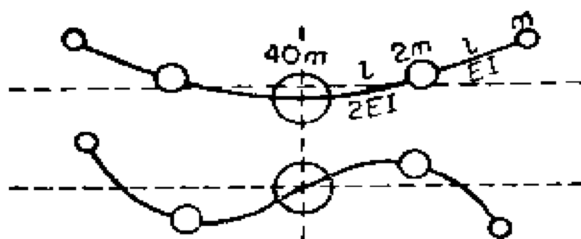


图 P.7-50

7-51 求证两个自由度系统的振型矩阵〔P〕的元素为

$$r_1=\frac{\omega^2 m}{\mu_1-1}\ ,\qquad r_2=\frac{\omega^2 m}{\mu_2-1}$$

这里系统的分段如图7.13-1所示，是一根弹簧及一个质量。

7-52 试说明对图P.7-52 所示系统，利用第 7.3 节的方法，固有频率方程式可简化成

$$-\mu_1^n r_2+\mu_2^n r_1=0$$

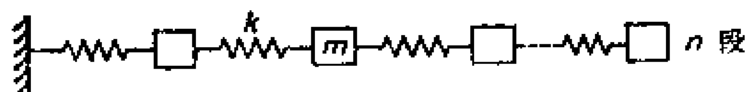


图 P.7-52

7-53 令方程式(7.13-8)中 $\mu_1=e^a$，$\mu_2=e^{-a}$，$(A+D)/2=\cosh a$。依照这些量推导出频率方程式。

7-54 把图7.13-3的系统简化成如图7.13-2所示的等效系统。

7-55 互换 θ 和 y，方程式(7.12-4)可重新整理成下列形式

$$\begin{Bmatrix}\theta\\ y\\ M\\ V\end{Bmatrix}_n=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI}\\ l & 1 & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{6EI}\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & l\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\theta\\ y\\ M\\ V\end{Bmatrix}_{n-1}$$

$$=\left[\begin{array}{c:c}A' & B\\ \hdashline 0 & A\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\theta\\ y\\ M\\ V\end{Bmatrix}_{n-1}$$

式中B对称于它的对角线。令$\delta=(\theta,y)'$和$L=(M,V)'$，试说明刚度矩阵为

$$\begin{Bmatrix} L_{n-1} \\ L_n \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} B^{-1} & -B^{-1}A' \\ \hdashline AB^{-1} & -AB^{-1}A' \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \end{Bmatrix}$$

7-56 计算题7-55的分块矩阵，并说明它们是下列形式(字母右上角的小撇指的是转置矩阵)

$$\begin{Bmatrix} L_{n-1} \\ L_n \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \mathscr{A} & \mathscr{B} \\ \hdashline -\mathscr{B}' & \mathscr{D} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \end{Bmatrix}$$

这正是贝蒂-麦克斯韦[1]相关性定理所预期的。

7-57 利用题7-56的符号，改写方程式(7.12-6)成为

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ L \end{Bmatrix}_n^R = \left[\begin{array}{c:c} A' & B \\ \hdashline Q & S \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta \\ L \end{Bmatrix}_{n-1}^R$$

并证明转置矩阵的行列式等于1。

7-58 试建立图 P.7-58所示扭转系统的差分方程。求边界方程式并解出固有频率。

7-59 图 P.7-59 所示为一根N个等质量用T力拉紧的弦，试建立差分方程。定出边界方程和固有频率。

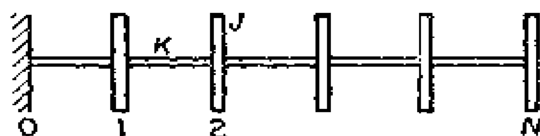


图 P.7-58

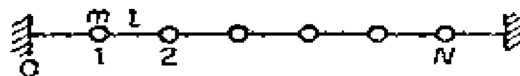


图 P.7-59

7-60 写出图 P.7-60 所示弹簧-质量系统的差分方程，并找出系统的固有频率。

7-61 图P.7-61所示一个N个质量的摆，确定其差分方程，边界条件和固有频率。

---

[1] Pestel and Leckie, *Matrix Methods in Elastomechanics*, pp. 151, 215.



图 P.7-60

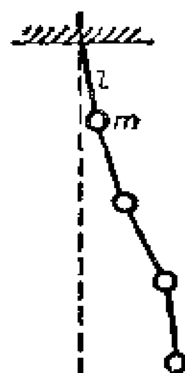


图 P.7-61

7-62 如果题7-58系统的左端，联接着一个重型飞轮如图P.7-62 所示，试证明边界条件会导出下列方程式

$$(-\sin N\beta\cos\beta+\sin N\beta)\left(1+4\frac{K}{K_a}\frac{J_a}{J}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=-2\frac{J_a}{J}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin\beta\cos N\beta$$

7-63 如果一座建筑物的顶层由一根刚度为K_N的弹簧限制住，如图 P.7-63 所示，求N层建筑物的固有频率。

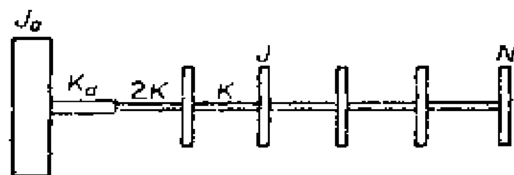


图 P.7-62

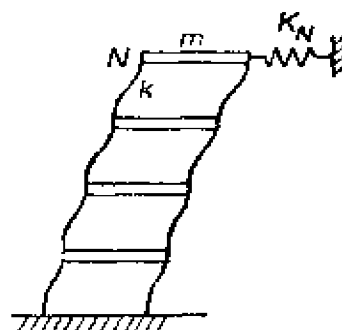


图 P.7-63

7-64 一个梯子形结构两端固定，如图P.7-64所示，求固有频率。

7-65 如果一个N层建筑物的地基允许相对于阻抗弹簧K_θ转动，如图P.7-65示，求边界方程式及固有频率。

7-66 画出题7-27的流程框图及写出Fortran程序。

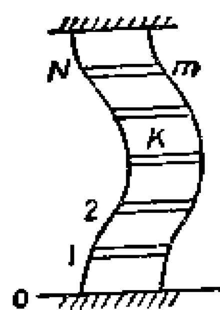


图 P.7-64

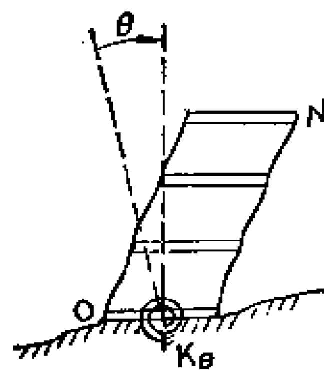


图 P.7-65

第八章 连 续 系 统

8.1 导引

本章研究质量和弹性连续分布的系统。这些物体假设是均匀的和各向同性的，并在弹性范围内服从虎克定律。为了说明弹性体内每一质点的位置，需要无限多数目的坐标，所以这类物体具有无限多个自由度。

通常，这些物体的自由振动是以前已在第五章中说明过的主振型的总和。对于振动的主振型，物体的每一质点均按相当于频率方程特征根的频率完成简谐运动，每一质点同时通过各自的平衡位置。假如运动开始时物体的弹性曲线刚好与主振型中之一重合，则仅产生那一主振型。但是，由于力的撞击或突然卸除所造成的弹性曲线很少能与某一主振型的曲线相一致，所以所有振型均将被激励。可是，在许多情况下，采用适宜的起始条件可以使某一特定的主振型被激励。

在本章中，提出了弹性体的一些较简单的振动问题。这些问题的解按振动的主振型进行处理。

8.2 振动弦

一根单位长度质量为 ρ 的挠性弦在张力 T 下被张紧。假设弦的横向挠度 y 很小，因而随挠度而变的张力变动极小，可以不予考虑。

图 8.2-1 表示一段单元长度为 dx 的弦分离体图。假设挠度和斜率很小，则 y 方向的运动方程式为

$$T\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}dx\right)-T\theta=\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

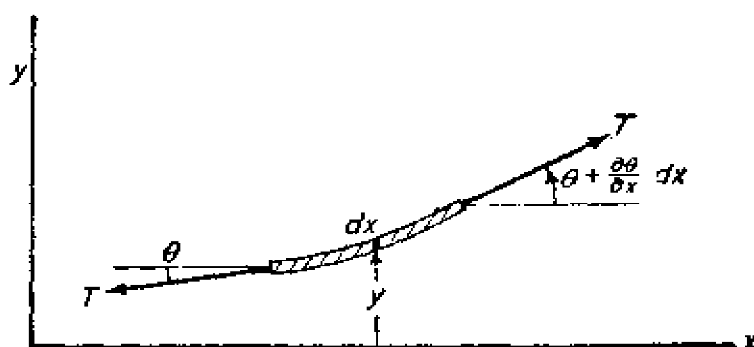


图 8.2-1 横向振动中的弦单元体

或

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\rho}{T}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8.2-1}$$

因为弦的斜率是 $\theta=\partial y/\partial x$，上列方程式可简化为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8.2-2}$$

式中 $c=\sqrt{T/\rho}$可被证明为沿弦传播的波速。

方程式（8.2-2）的一般解可用下列形式来表示

$$y=F_1(ct-x)+F_2(ct+x) \tag{8.2-3}$$

式中 F_1 和 F_2 为任意函数。不管函数 F 的形式如何，对自变量（$ct\pm x$）微分后就导出方程式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \tag{8.2-4}$$

因而微分方程被满足。

分析组成项 $y=F_1(ct-x)$，它的数值是由自变量$(ct-x)$ 决定的，因而，也就是由一系列 t 和 x 的数组决定的。例如，假使 $c=10$，则方程式 $y=F_1(100)$将被 $t=0, x=-100$； $t=1$， $x=-90$； $t=2$， $x=-80$ 等所满足。所以，波形以速度 c 朝 x 轴的正方向运动。按同样方式，我们可以证明 $F_2(ct+x)$ 代表以速度 c 朝 x 轴负方向运动的波。因此，我们把 c 看作是波的传播速度。

解偏微分方程的方法之一是变量分离法。在这一方法中，解

被假设为如下形式

$$y(x,t)=Y(x)G(t) \tag{8.2-5}$$

把上式代入方程（8.2-2），我们得到

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dt^2} \tag{8.2-6}$$

因为这一方程式的左边与 t 无关，而右边与 x 无关，因而每边必须是一常量。令这一常量为 $-(\omega/c)^2$，我们得到两个常微分方程

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2Y=0 \tag{8.2-7}$$

$$\frac{d^2G}{dt^2}+\omega^2G=0 \tag{8.2-8}$$

其一般解为

$$Y=A\sin\frac{\omega}{c}x+B\cos\frac{\omega}{c}x \tag{8.2-9}$$

$$G=C\sin\omega t+D\cos\omega t \tag{8.2-10}$$

任意常数 A、B、C、D 决定于边界条件和起始条件。例如，若弦被张紧于相距 l 的两固定点之间，则边界条件为 $y(0,t)=y(l,t)=0$。$y(0,t)=0$ 这一条件要求 $B=0$，因而解将表现为

$$y=(C\sin\omega t+D\cos\omega t)\sin\frac{\omega}{c}x \tag{8.2-11}$$

于是条件 $y(l,t)=0$ 导致方程式

$$\sin\frac{\omega l}{c}=0$$

或

$$\frac{\omega_n l}{c}=\frac{2\pi l}{\lambda}=n\pi,\qquad n=1,2,3\cdots$$

$\lambda=c/f$ 是波长，f 是振荡频率。每一 n 表示一种主振型的振动，其固有频率决定于下列方程式

$$f_n=\frac{n}{2l}c=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},\quad n=1,2,3\cdots \tag{8.2-12}$$

振型形状是正弦曲线，其分布为

$$Y = \sin n\pi \frac{x}{l} \tag{8.2-13}$$

在以任意方式起始的自由振动的更一般情形中，解将包含许多主振型，而位移方程可写成

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin\omega_n t + D_n \cos\omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{8.2-14}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

令此方程符合起始条件$y(x,0)$和$\dot{y}(x,0)$，即可求得C_n和D_n。

例　8.2-1

一根长度为l的匀质弦两端固定并以张力T张紧。假如弦被位移成任意形状$y(x,0)$然后释放，求方程(8.2-14)中的C_n和D_n。

解：当$t=0$时，位移和速度为

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\dot{y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = 0$$

每一方程乘以$\sin k\pi x/l$，并从$x=0$到$x=l$进行积分，则除$n=k$项外，右边的所有项将变为零。这样，我们就得到结果

$$D_k = \frac{2}{l}\int_0^l y(x,0)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$C_k = 0 \qquad\qquad k = 1,2,3,\cdots$$

8.3　杆的纵向振动

本节中考虑的杆假设是细的和沿其长度匀质的。由于轴向力的作用，沿着杆将产生位移u，这个位移将是位置x和时间t两者的函数。因为杆具有无限多个固有振动振型，因而位移的分布将随着每一振型而不同。

让我们来研究杆中长度为dx的一个单元（图8.3-1）。如令

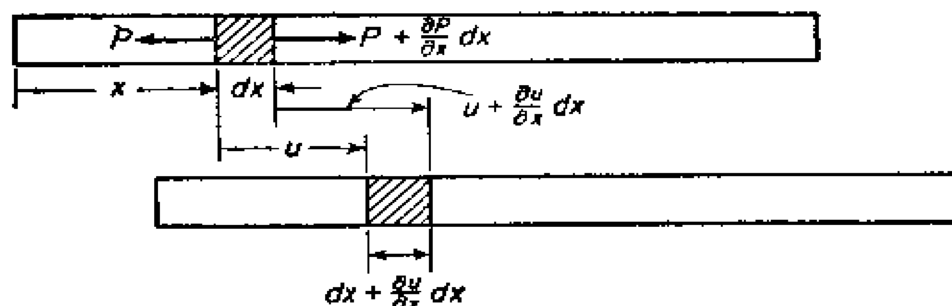


图 8.3-1 杆单元的位移

u 为 x 处的位移，则 $x+dx$ 处的位移将为 $u+(\partial u/\partial x)dx$。于是很显然，单元 dx 在新的位置上将有数量为 $(\partial u/\partial x)dx$ 的长度变动，因而单位形变为 $\partial u/\partial x$。因为根据虎克定律，单位应力对单位形变之比等于弹性模量 E，我们可写成

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{P}{AE} \tag{8.3-1}$$

式中 A 为杆的断面面积。对 x 求导可得

$$AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial P}{\partial x} \tag{8.3-2}$$

现在，我们对单元应用牛顿运动定律，使不平衡力等于单元的质量和加速度的乘积

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx=\rho\frac{Adx}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8.3-3}$$

式中 ρ 是以单位容积的磅数计算的杆的密度。在方程(8.3-2)和(8.3-3)之间消去 $\partial P/\partial x$，我们得到偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(\frac{Eg}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.3-4}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8.3-5}$$

这一方程与弦的方程（8.2-2）是相似的。于是，杆中位移或应力波的传播速度等于

$$c=\sqrt{Eg/\rho} \qquad (8.3-6)$$

应用下列形式的解

$$u(x,\ t)=U(x)G(t) \qquad (8.3-7)$$

将得出和方程（8.2-7）及（8.2-8）类似的两个常微分方程为

$$U(x)=A\sin\frac{\omega}{c}x+B\cos\frac{\omega}{c}x \qquad (8.3-8)$$

$$G(t)=C\sin\omega t+D\cos\omega t \qquad (8.3-9)$$

例　8.3-1

求一个自由-自由杆（两端都自由的杆）的固有频率和振型形状。

解：对这样的杆，其端部处的应力必须为零。因为应力是由公式$E\partial u/\partial x$给出的，所以端部处的形变也必须为零；即在$x=0$和$x=l$处

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

所以，与上列边界条件相当的两个方程为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=A\frac{\omega}{c}(C\sin\omega t+D\cos\omega t)=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l}=\frac{\omega}{c}\left(A\cos\frac{\omega l}{c}-B\sin\frac{\omega l}{c}\right)$$

$$(C\sin\omega t+D\cos\omega t)=0$$

因为这些方程对任何时间 t 都必须是正确的，所以从第一个方程可得 A 必须等于零。因为 B 必须是有限的以便产生振动，所以第二个方程当

$$\sin\frac{\omega l}{c}=0$$

或

$$\frac{\omega_n l}{c}=\omega_n l\sqrt{\rho/Eg}=\pi,2\pi,3\pi\cdots,n\pi$$

时是满足的。

于是，振动频率得出为

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\rho}}, \quad f_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\rho}}$$

式中 n 代表振型的次数。起始位移为零时，自由-自由杆的 解 可以写成

$$u = u_0\cos\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\rho}}\,t$$

所以，沿杆的纵向振动的振幅是具有 n 个节点的余弦波。

8.4 杆的扭转振动

杆扭转振动时的运动方程与上节讨论的杆纵向振动时的运动方程相似。

令x沿杆的长度计量，则在杆的任一长度dx上，由于扭矩T而引起的转角为

$$d\theta = \frac{Tdx}{I_pG} \tag{8.4-1}$$

式中I_pG是由断面面积的极惯矩 I_p和剪切模量 G 的乘积给出的扭转刚度。作用于单元两个端面上的扭矩分别为T 和 $T+(\partial T/\partial x)dx$，如图8.4-1所示，于是从方程（8.4-1）得纯扭矩为

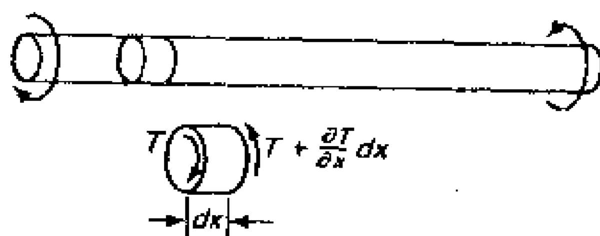
$$\frac{\partial T}{\partial x}dx = I_pG\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx \tag{8.4-2}$$

令此扭矩等于单元体质量惯矩$(\rho/g)I_pdx$（式中ρ为以单位容积的磅数计算的杆的密度）和角加速度 $\partial^2\theta/\partial t^2$ 的 乘 积，则运动微分方程变为

$$\frac{\rho}{g}I_pdx\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = I_pG\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \left(\frac{Gg}{\rho}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{8.4-3}$$

这一方程与杆的纵向振动方程具有相同的形式，只是依次用 θ 和 Gg/ρ取代u和Eg/ρ。所以，其一般解可以通过比较直接写出为

$$\theta = \left(A\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}x + B\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}x\right)(C\sin\omega t + D\cos\omega t) \tag{8.4-4}$$



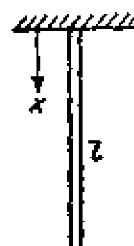


图 8.4-1 作用于一个单元体dx上的扭矩　　图 8.4-2

例 8.4-1

求图 8.4-2 所示一端固定、一端自由的匀质杆扭转振荡时的固有频率方程。

解，从方程

$$\theta=(A\sin\omega\sqrt{\rho/Gg}\,x+B\cos\omega\sqrt{\rho/Gg}\,x)\sin\omega t$$

开始，应用边界条件，即

（1）当$x=0$时，$\theta=0$，

（2）当$x=l$时，扭矩＝0，或

$$\partial\theta/\partial x=0$$

边界条件（1）得出$B=0$。

边界条件（2）得出方程

$$\cos\omega\sqrt{\rho/Gg}\,l=0$$

这一方程被下列角度所满足

$$\omega_n\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}\,l=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\cdots\cdots,\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

因此，杆的固有频率由下列方程求得

$$\omega_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Gg}{\rho}}$$

式中　$n=0，1，2，3，\cdots\cdots$

例 8.4-2

一个油井的钻管下端与装有钻头的钻杆联结在一起。假设钻

管是均匀的，其上端固定，钻杆和钻头可用惯矩为J_0的终端质量来代表，如图8.4-3所示，导出固有频率的算式。

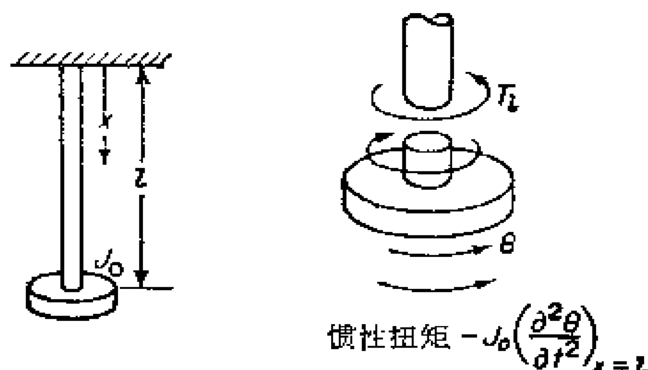


图 8.4-3

解：上端的边界条件是$x=0$，$\theta=0$，这条件要求方程(8.4-4)中的B为零。

对下端，作用于轴上的扭矩是由终端圆盘的惯性扭矩引起的，如图8.4-3中的分离体图所示。圆盘的惯性扭矩是$-J_0(\partial^2\theta/\partial t^2)_{x=l}=J_0\omega^2(\theta)_{x=l}$，而从方程（8.4-1），轴的扭矩是$T_l=GI_P(d\theta/dx)_{x=l}$。令此两者相等，我们有

$$GI_P\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=l}=J_0\omega^2(\theta)_{x=l}$$

将方程（8.4-4）代入并令$B=0$

$$GI_P\omega\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}l=J_0\omega^2\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}l$$

$$\tan\omega l\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}=\frac{I_P}{\omega J_0}\sqrt{\frac{G\rho}{g}}=\frac{I_P\rho l}{gJ_0\omega l}\sqrt{\frac{Gg}{\rho}}$$

$$=\frac{J_{杆}}{J_0\omega l}\sqrt{\frac{Gg}{\rho}}$$

这方程属于如下形式

$$\beta\tan\beta=\frac{J_{杆}}{J_0},\quad \beta=\omega l\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}$$

它可用图解法或查表法来解[1]

例 8.4-3

应用上例中导出的频率方程，求一根长500英尺、上端固定、下端联有 120 英尺长钻环的油井钻管的前两个固有频率。钻管和钻环的平均尺寸给定如下

钻管：外径 = $4\frac{1}{2}$英寸

内径 = 3.83英寸

$I_P = 0.00094$英尺^4

$l = 5000$英尺

$$J_{杆} = I_P\frac{\rho l}{g} = 0.00094 \times \frac{490}{32.2} \times 5000$$

$$= 71.4 \text{磅·英尺·秒}^2$$

钻环：外径 = $7\frac{5}{8}$英寸

内径 = 2.0英寸

$$J_0 = 0.244 \times 120\text{英尺} = 29.3\text{磅·英尺·秒}^2$$

解：待解的方程是

$$\beta\tan\beta = \frac{J_{杆}}{J_0} = 2.44$$

从姜克和爱姆特著函数表第32页表Ⅴ，得$\beta = 1.135, 3.722, \cdots$

$$\beta = \omega l\sqrt{\frac{\rho}{Gg}} = 5000\ \omega\sqrt{\frac{490}{12\times 10^6 \times 12^2 \times 32.2}}$$

$$= 0.470\omega$$

解出ω，可得前两个固有频率为

$$\omega_1 = \frac{1.135}{0.470} = 2.41\text{弧度/秒} = 0.384\text{周/秒}$$

[1] 参见Jahnke and Emde, *Tables of Functions*, 4th Ed (Dover Publications, Inc., 1945), Table V, p.32.

$$\omega_2 = \frac{3.722}{0.470} = 7.93\text{弧度/秒} = 1.26\text{周/秒}$$

8.5　梁的欧拉方程

为了确定梁的横向振动微分方程，我们来研究图 8.5-1 中所示的作用于梁的一个单元上的力和力矩。

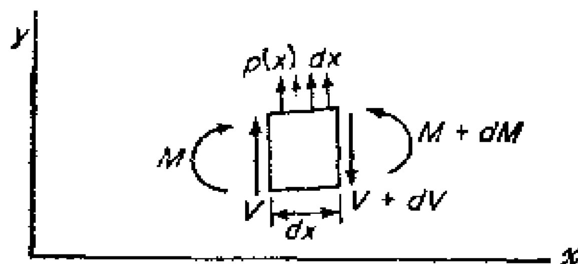


图 8.5-1

V 和M依次为切力和弯矩，$p(x)$ 代表梁单位长度上的荷载。

把y方向的力总加起来，得

$$dV - p(x)dx = 0 \qquad (8.5\text{-}1)$$

把围绕单元右端面上任意点的力矩总加起来，得

$$dM - Vdx - \frac{1}{2}p(x)(dx)^2 = 0 \qquad (8.5\text{-}2)$$

这些方程经求限处理后，得出下列重要关系式

$$\frac{dV}{dx} = p(x), \qquad \frac{dM}{dx} = V \qquad (8.5\text{-}3)$$

方程 (8.5-3) 的第一式说明切力沿梁长度的变化率等于单位长度的荷载，第二式说明沿梁的弯矩变化率等于切力。

从方程 (8.5-3)，我们得出如下结果

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = p(x) \qquad (8.5\text{-}4)$$

弯矩和曲率之间的关系由挠度方程式表出，对于图 8.5-1 所示的

坐标系，挠度方程为

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} \tag{8.5-5}$$

将此关系式代入方程（8.5-4），我们得

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = p(x) \tag{8.5-6}$$

对于一根在自重作用下围绕其静平衡位置振动的梁，单位长度的荷载等于它的质量和加速度所引起的惯性荷载。因为如图8.5-1所示，惯性力的方向与$p(x)$相同，则假设为简谐运动时，我们可得

$$p(x) = \frac{w}{g}\omega^2 y \tag{8.5-7}$$

式中 w/g是梁单位长度的质量。利用这种关系，梁的横向振动方程化为

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{w}{g}\omega^2 y = 0 \tag{8.5-8}$$

在刚度EI为常量的特殊情况下，上列方程可以写成

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{w}{g}\omega^2 y = 0 \tag{8.5-9}$$

用符号

$$\beta^4 = \frac{w}{g}\frac{\omega^2}{EI} \tag{8.5-10}$$

代入，我们得到均匀梁振动时的四阶微分方程

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \beta^4 y = 0 \tag{8.5-11}$$

方程（8.5-11）的一般解可以表示为

$$y = A\cosh\beta x + B\sinh\beta x + C\cos\beta x + D\sin\beta x \tag{8.5-12}$$

为了得到这一结果，我们假设解的形式为

$$y = e^{ax}$$

当$a = \pm\beta$和$a = \pm i\beta$时，它将满足微分方程。因为

$$e^{\pm\beta x}=\cosh\beta x\pm\sinh\beta x$$

$$e^{\pm i\beta x}=\cos\beta x\pm i\sin\beta x$$

所以方程（8.5-12）形式的解很容易地被建立。

振动的固有频率可从方程（8.5-10）求得为

$$\omega_n=\beta^2\sqrt{gEI/w}$$

式中数β决定于问题的边界条件。下表中列出了典型终端条件下$(\beta l)^2$的数值。

梁的支承型式	$(\beta_1 e)^2$ 基本振型	$(\beta_2 e)^2$ 第二振型	$(\beta_3 e)^2$ 第三振型
简　支	9.87	39.5	88.9
悬　臂	3.52	22.4	61.7
两端自由	22.4	61.7	121.0
两端固定	22.4	61.7	121.0
一端固定，一端铰支	15.4	50.0	104.0
一端铰支，一端自由	0	15.4	50.0

例　8.5-1

求一端固定、一端自由之均匀梁的固有振动频率。

解：边界条件是

$$\text{在}x=0\text{处}\begin{cases}y=0\\ \dfrac{dy}{dx}=0\end{cases}$$

$$\text{在}x=l\text{处}\begin{cases}M=0\text{或}\dfrac{d^2y}{dx^2}=0\\ V=0\text{或}\dfrac{d^3y}{dx^3}=0\end{cases}$$

将这些边界条件代入一般解中，我们得

$$(y)_{x=0}=A+C=0,\quad \therefore A=-C$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\beta[A\sinh\beta x+B\cosh\beta x-C\sin\beta x+$$

$$+D\cos\beta x]_{x=0}=0$$

$$\beta[B+D]=0,\quad \therefore B=-D$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l}=\beta^2[A\cosh\beta l+B\sinh\beta l-C\cos\beta l-$$

$$-D\sin\beta l]=0$$

$$A(\cosh\beta l+\cos\beta l)+B(\sinh\beta l+\sin\beta l)=0$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=l}=\beta^3[A\sinh\beta l+B\cosh\beta l+C\sin\beta l-$$

$$-D\cos\beta l]=0$$

$$A(\sinh\beta l-\sin\beta l)+B(\cosh\beta l+\cos\beta l)=0$$

从最后两个方程，我们得

$$\frac{\cosh\beta l+\cos\beta l}{\sinh\beta l-\sin\beta l}=\frac{\sinh\beta l+\sin\beta l}{\cosh\beta l+\cos\beta l}$$

该式可化为

$$\cosh\beta l\cos\beta l+1=0$$

这最后一个方程可被许多与振荡的每一主振型相当的 βl 值所满足，对第一和第二振型，βl 之值依次为1.875和4.695。因此，对第一振型，其固有频率得出为

$$\omega_1=\frac{1.875^2}{l^2}\sqrt{\frac{gEI}{w}}=\frac{3.515}{l^2}\sqrt{\frac{gEI}{w}}$$

8.6 转动惯量和剪切变形的影响

铁摩辛柯理论考虑了梁的转动惯量和剪切变形两者的影响。图8.6-1示出了梁单元体的分离体图和几何形状。假如剪切变形为

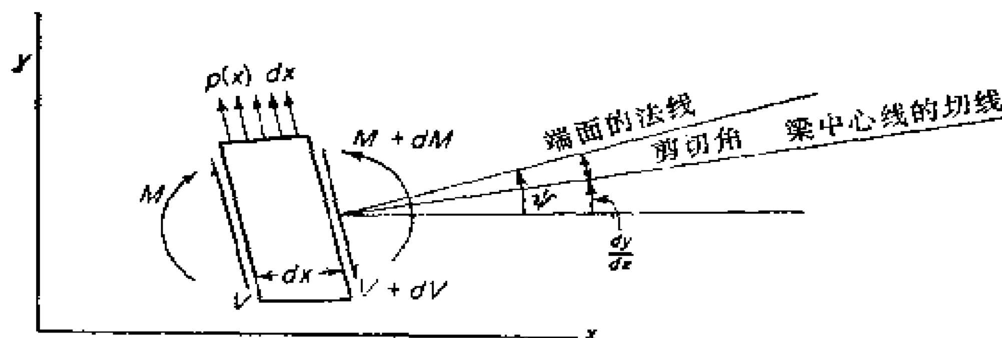


图 8.6-1 剪切变形的影响

零，则梁单元体的中心线将与断面的法线重合。由于剪力的作用，长方形单元体将在端面不转动的情况下趋向于变为菱形，中心线的斜率被剪切角（$\psi - dy/dx$）所减小。于是，下列量可定义为

y = 梁中心线的挠度

$\frac{dy}{dx}$ = 梁中心线的斜率

ψ = 由于弯曲而引起的斜率

$\psi - \frac{dy}{dx}$ = 斜率损失，等于剪切角

梁有两个弹性方程，它们是

$$\psi - \frac{dy}{dx} = \frac{V}{kAG} \tag{8.6-1}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{M}{EI} \tag{8.6-2}$$

式中A为断面面积，G为剪切模量，k为决定于断面形状的系数，EI为弯曲刚度。另外，还有两个动力方程

$$（力矩）\quad J\ddot{\psi} = \frac{dM}{dx} - V \tag{8.6-3}$$

$$（力）\quad m\ddot{y} = -\frac{dV}{dx} + p\ (x,t) \tag{8.6-4}$$

式中J和m为梁单位长度的转动惯量和质量。

将弹性方程代入动力方程，我们得

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\psi}{dx}\right) + kAG\left(\frac{dy}{dx} - \psi\right) - J\ddot{\psi} = 0 \tag{8.6-5}$$

$$m\ddot{y} - \frac{d}{dx}\left[kAG\left(\frac{dy}{dx} - \psi\right)\right] - p(x,t) = 0 \tag{8.6-6}$$

它们是梁的运动耦合方程。

假如消去ψ，而且断面保持常值，则这两个方程可以简化成一个单一方程

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\left(J+\frac{EIm}{kAG}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{Jm}{kAG}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}$$

$$=p(x,t)+\frac{J}{kAG}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{EI}{kAG}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad (8.6\text{-}7)$$

于是很显然，欧拉方程

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p(x,t)$$

是包括转动惯量和剪切变形下梁的一般方程的特殊情况。

8.7 薄膜的振动

薄膜没有弯曲刚度，作用在它上面的横向荷载仅由薄膜自身的张力来抵坑。它的运动方程可用类似于在弦中用过的步骤导出，但要用到二维上。

假设薄膜处于单位长度为T磅的均匀张力作用之下，这一张力很大，以致横向挠度引起的变化很小。设薄膜的平衡位置在xy平面内，并令w为横向挠度，我们来观察图8.7-1所示作用于单元体$dxdy$上的力。由于dy边上的张力而在w方向引起的合力为

$$Tdy\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}dx\right)-Tdy\theta=T\frac{\partial\theta}{\partial x}dydx \qquad (8.7\text{-}1)$$

同样，作用在dx边上的张力引起分力$T(\partial\phi/\partial y)dydx$。因为$x$和$y$方向的斜率分别为$\theta=\partial w/\partial x$和$\phi=\partial w/\partial y$，故由张力$T$引起的总横向力为

$$T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy \qquad (8.7\text{-}2)$$

令ρ为薄膜单位面积的质量，$p(x,y)$为施加的模向压力，则运动方程变为

$$\rho dxdy\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy+p(x,y)dxdy$$

或

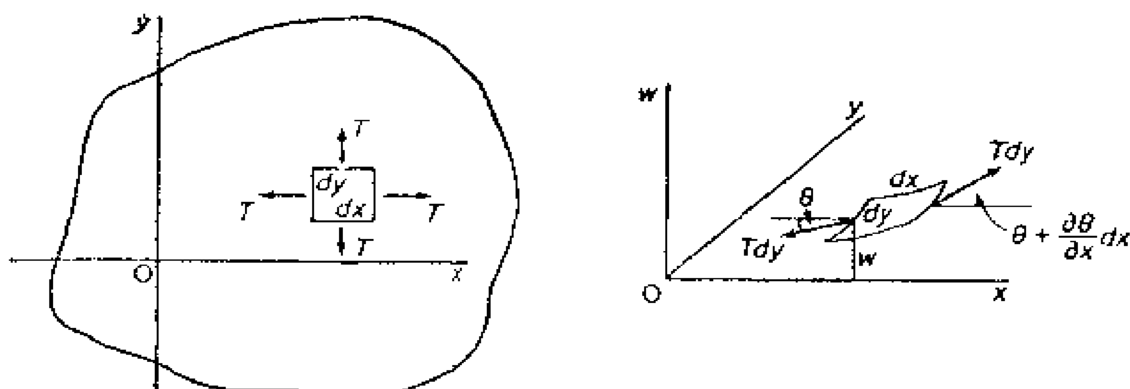


图 8.7-1

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 w + \frac{1}{\rho} p(x, y) \qquad (8.7\text{-}3)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

采用适当的∇^2表达式后，这一方程也适用于其它坐标系统。

对振动的主振型形式，$p(x, y) = 0$ 和 $\partial^2 w/\partial t^2 = -\omega^2 w$，微分方程简化为

$$\nabla^2 w + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 w = 0 \qquad (8.7\text{-}4)$$

对图8.7-2所示尺寸$(x, y) = (a, b)$的长方形薄膜，可用变量分离法达到求解的目的。令 $w(x, y) = X(x)Y(y)$ 并代入方程（8.7-4），容易证明解具有如下形式

$$X(x) = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x$$

$$Y(y) = C_3 \sin\beta y + C_4 \cos\beta y \qquad (8.7\text{-}5)$$

式中$\alpha^2 + \beta^2 = (\omega/c)^2$。在这些方程中，常量 C_i 必须从边界条件确定。

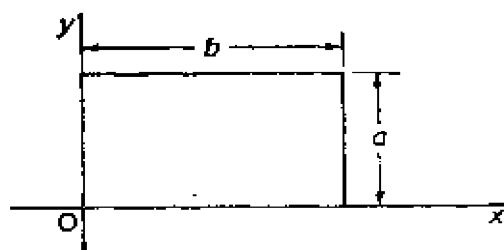


图 8.7-2

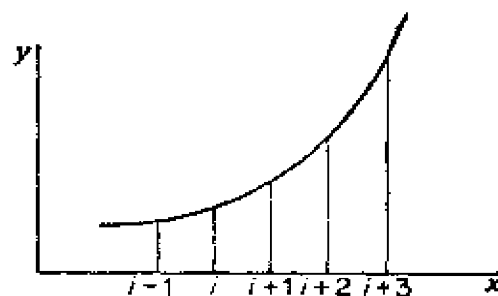


图 8.8-1

8.8 数字计算

在许多问题中，分析解是不可能的，在这种情况下，必须应用近似数值法。有几种数值法可供应用，最适宜方法的选择决定于问题本身。在本章中，我们将简略地讨论两种应用得很广泛的数值法。

有限差分法 在这一方法中，微分方程及其边界条件用相应的有限差分方程来代替。这样，问题就可化为能用数字计算机求解的一组联立代数方程。

我们来研究图8.8-1所示的函数$y(x)$。在某点x_i上，导数可以用下式近似算出

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \cong \frac{1}{h}(y_{i+1}-y_i)=\frac{1}{h}\Delta y \qquad (8.8\text{-}1)$$

式中$h=(x_{i+1}-x_i)$。二阶导数为

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \cong \frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}(y_{i+2}-y_{i+1})-\frac{1}{h}\times\right.$$

$$\left.\times(y_{i+1}-y_i)\right]=\frac{1}{h^2}(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i)=\frac{1}{h^2}\Delta^2 y$$

$$(8.8\text{-}2)$$

上列步骤可以重复任意次以求取更高阶导数。到四阶导数的有限差分典型示于附表中。

边界条件 为了满足边界条件，必须选择构件以外的虚设

有 限 差 分 表

x	y	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$	$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$	$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$
x_1	y_1				
		$\frac{1}{h}(y_2-y_1)$			
x_2	y_2		$\frac{1}{h^2}(y_3-2y_2+y_1)$		
		$\frac{1}{h}(y_3-y_2)$		$\frac{1}{h^3}(y_4-3y_3+3y_2-y_1)$	
x_3	y_3		$\frac{1}{h^2}(y_4-2y_3+y_2)$		$\frac{1}{h^4}(y_5-4y_4+6y_3-4y_2+y_1)$
		$\frac{1}{h}(y_4-y_3)$		$\frac{1}{h^3}(y_5-3y_4+3y_3-y_2)$	
x_4	y_4		$\frac{1}{h^2}(y_5-2y_4+y_3)$		$\frac{1}{h^4}(y_6-4y_5+6y_4-4y_3+y_2)$
		$\frac{1}{h}(y_5-y_4)$		$\frac{1}{h^3}(y_6-3y_5+3y_4-y_3)$	
x_5	y_5		$\frac{1}{h^2}(y_6-2y_5+y_4)$		
		$\frac{1}{h}(y_6-y_5)$			
x_6	y_6				

点。下面给出梁的典型边界条件的一些例子。

简支梁 如图 8.8-2 所示，令位置 1 左边的点为 p。梁左端的边界条件是

$$y_1 = 0, \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 = 0$$

写出位置 1 处二阶导数的有限差分方程，我们有

$$\frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_p) = \frac{1}{h_2}(y_2 - 0 + y_p) = 0$$

这样，y_p必须等于 $-y_2$。

固定端 在固定端处，挠度和斜率两者都为零，如图 8.8-3 所示。再令y_p为位置 1 左边的挠度，采用$2h$为区间，我们有

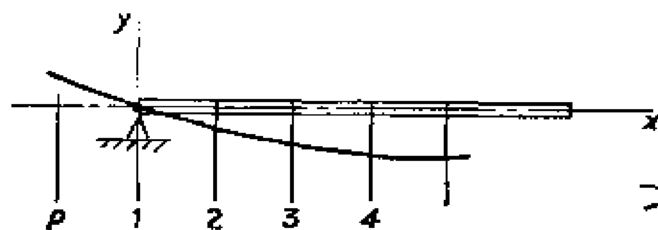


图 8.8-2

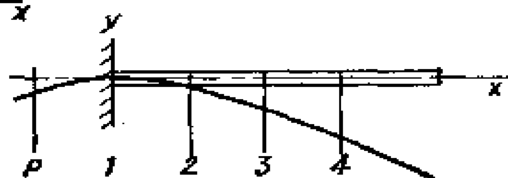


图 8.8-3

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{1}{2h}(y_2 - y_p) = 0$$

这样，$y_p = y_2$，挠度曲线对称于墙壁。

部分约束梁 其次，我们来研究梁的左端受到部分约束的情形。我们可用一个刚度为K磅·英寸/弧度的扭转弹簧来代表这种情况，如图8.8-4所示。边界处的力矩是$M_1 = -K\theta_1$，但

$$\theta_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{1}{2h}(y_2 - y_p)$$

同时

$$M_1 = EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 = \frac{EI}{h^2}(y_2 - 0 + y_p)$$

代入$M_1 = -K\theta_1$并解出y_p，我们得

$$y_p = -y_2\left(\frac{2EI + Kh}{2EI - Kh}\right)$$

自由端 在梁的自由端处，力矩和切力必须是零。我们引入两个虚设点 p 及 g，以及一个任意数 4 代表终端处的位置，如图 8.8-5所示。

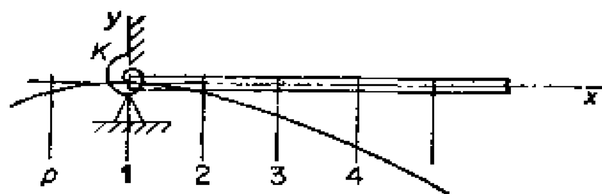


图 8.8-4

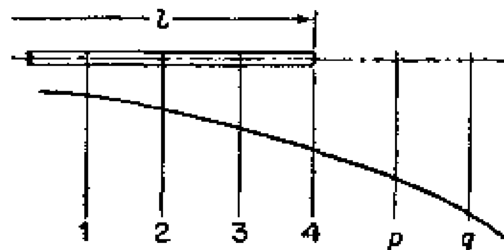


图 8.8-5

参照有限差分表，对力矩，我们有

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_4 = \frac{1}{h^2}(y_p - 2y_4 + y_3) = 0$$

或

$$y_p = 2y_4 - y_3$$

对切力，我们取终端处三阶导数的平均值如下。按这种办法一般可以得到较高的精确度。

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h^3}(y_q - 3y_p + 3y_4 - y_3) + \frac{1}{h^3}(y_p - 3y_4 + 3y_3 - y_2)\right] = \frac{1}{2h^3}(y_q - 2y_p + 2y_3 - y_2) = 0$$

这样

$$y_q = 4y_4 - 4y_3 + y_2$$

例 8.8-1

一根惯矩不均匀的梁放在一个刚度为 k 磅/英寸的弹性基础上，如图 8.8-6 所示。梁的固有频率可从它的微分方程求出，方程是

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)+ky-\omega^2my=0 \qquad (a)$$

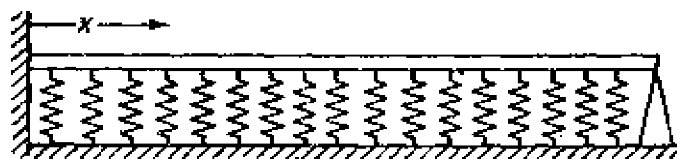


图 8.8-6

用有限差分法解这一问题时，我们沿着梁从 1 到 n 用数定出位置，并对每一断面给定一个新的基础刚度k/h，如图 8.8-7 所示。方程（a）也从新改写成

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+2E\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dI}{dx}+E\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2I}{dx^2}+(k-m\omega^2)y=0 \qquad (b)$$

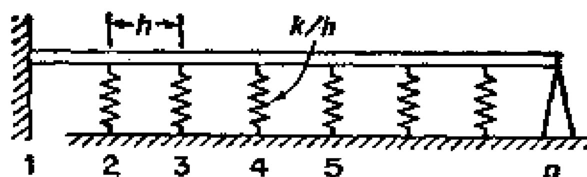


图 8.8-7

现在，注意左端的边界条件，我们可以写出位置 2 的有限差分方程。所遇到的导数是

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_2=\frac{1}{h^2}(y_3-2y_2+y_1)=\frac{1}{h^2}(y_3-2y_2)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h^3}(y_4-3y_3+3y_2-y_1)+\frac{1}{h^3}\times\right.$$

$$\left.\times(y_3-3y_2+3y_1-y_p)\right]=\frac{1}{2h^3}(y_4-2y_3-$$

$$-y_p)=\frac{1}{2h^3}(y_4-2y_3-y_2)$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_2 = \frac{1}{h^4}(y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 0 + y_2)$$

$$= \frac{1}{h_4}(y_4 - 4y_3 + 7y_2)$$

应用这些导数，位置2的有限差分方程变为

$$\frac{EI_2}{h_4}(y_4 - 4y_3 + 7y_2) + \frac{2E}{2h^3}(y_4 - 2y_3 - y_2)\frac{1}{2h}\times$$

$$\times(I_3 - I_1) + \frac{E}{h^2}(y_3 - 2y_2)\frac{1}{h^2}(I_3 - 2I_2 + I_1) +$$

$$+\left(\frac{h}{h} - m\omega^2\right)y_2 = 0 \qquad (c)$$

按照同样方式，可以写出其它位置的方程。右端的边界条件也必须予以考虑，所得的一组代数方程可以编出数字计算的程序。

龙格-库塔法 龙格-库塔法是一种流行的方法，因为它是从自身开始的，并得出良好的精确度。误差阶数为h^5。

为了举例说明其过程，我们来研究第8.6节中讨论过的具有转动惯量和剪切项的梁。首先，四阶方程写成四个一阶方程如下

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{M}{EI} = F(x,\psi,y,M,V)$$

$$\frac{dy}{dx} = \psi - \frac{V}{kAG} = G(x,\psi,y,M,V)$$

$$\frac{dM}{dx} = V - \omega^2 J\psi = P(x,\psi,y,M,V) \qquad (8.8\text{-}3)$$

$$\frac{dV}{dx} = \omega^2 my = K(x,\psi,y,M,V)$$

在第4.8节中讨论过的适用于单一坐标的龙格-库塔过程现在被引伸为同时解下列四个变量的过程

$$\psi = \psi_1 + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

$$y = y_1 + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)$$

$$M = M_1 + \frac{h}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4) \quad (8.8\text{-}4)$$

$$V = V_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

式中　$h = \Delta x$。

计算继续进行如下

$$f_1 = F(x_1, \psi_1, y_1, M_1, V_1)$$
$$g_1 = G(x_1, \psi_1, y_1, M_1, V_1)$$
$$p_1 = P(x_1, \psi_1, y_1, M_1, V_1)$$
$$k_1 = K(x_1, \psi_1, y_1, M_1, V_1)$$

$$f_2 = F\left(x_1 + \frac{h}{2},\ \psi_1 + f_1\frac{h}{2},\ y_1 + g_1\frac{h}{2},\ M_1 + p_1\frac{h}{2},\ V_1 + k_1\frac{h}{2}\right)$$

$$g_2 = G\left(x_1 + \frac{h}{2},\ \psi_1 + f_1\frac{h}{2},\ y_1 + g_1\frac{h}{2},\ M_1 + p_1\frac{h}{2},\ V_1 + k_1\frac{h}{2}\right)$$

$$p_2 = P\left(x_1 + \frac{h}{2},\ \psi_1 + f_1\frac{h}{2},\ y_1 + g_1\frac{h}{2},\ M_1 + p_1\frac{h}{2},\ V_1 + k_1\frac{h}{2}\right)$$

$$k_2 = K\left(x_1 + \frac{h}{2},\ \psi_1 + f_1\frac{h}{2},\ y_1 + g_1\frac{h}{2},\ M_1 + p_1\frac{h}{2},\ V_1 + k_1\frac{h}{2}\right)$$

$$f_3 = F\left((x_1 + \frac{h}{2},\ \psi_1 + f_2\frac{h}{2},\ y_1 + g_2\frac{h}{2},\right.$$

$$M_1+p_2\frac{h}{2},\ V_1+k_2\frac{h}{2}\Big)$$

$$g_3=G\Big(x_1+\frac{h}{2},\ \psi_1+f_2\frac{h}{2},\ y_1+g_2\frac{h}{2},$$

$$M_1+p_2\frac{h}{2},\ V_1+k_2\frac{h}{2}\Big)$$

$$p_3=P\Big(x_1+\frac{h}{2},\ \psi_1+f_2\frac{h}{2},\ y_1+g_2\frac{h}{2},$$

$$M_1+p_2\frac{h}{2},\ V_1+k_2\frac{h}{2}\Big)$$

$$k_3=K\Big(x_1+\frac{h}{2},\ \psi_1+f_2\frac{h}{2},\ y_1+g_2\frac{h}{2},$$

$$M_1+p_2\frac{h}{2},\ V_1+k_2\frac{h}{2}\Big)$$

$$f_4=F(x_1+h,\ \psi_1+f_3h,\ y_1+g_3h,\ M_1+p_3h,$$
$$V_1+k_3h)$$
$$g_4=G(x_1+h,\ \psi_1+f_3h,\ y_1+g_3h,\ M_1+p_3h,$$
$$V_1+k_3h)$$
$$p_4=P(x_1+h,\ \psi_1+f_3h,\ y_1+g_3h,\ M_1+p_3h,$$
$$V_1+k_3h)$$
$$k_4=K(x_1+h,\ \psi_1+f_3h,\ y_1+g_3h,\ M_1+p_3h,$$
$$V_1+k_3h)$$

用这些量代入方程（8.8-4），可以求出邻点 x_2 处的因变量，接着对点x_3重复上列过程，如此继续下去。

回到梁的方程，其始端x_1的边界条件提供了一个起始点。例如，原点在固定端的悬臂梁中，起始端的边界条件是

$$\psi_1=0,\qquad M_1=M_1$$
$$y_1=0,\qquad V_1=V_1$$

这些边界条件可被看作为两个边界向量的线性组合如下

$$\begin{Bmatrix}\psi_1\\y_1\\M_1\\V_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\0\end{Bmatrix}+\alpha\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\1\end{Bmatrix}=C_1+\alpha D_1$$

因为这系统是线性的，我们可以分开来从每一边界向量开始。从C_1开始，我们得

$$C_N=\begin{Bmatrix}\psi_N\\y_N\\M_N\\V_N\end{Bmatrix}_C$$

从D_1 开始，我们得

$$\alpha D_N=\begin{Bmatrix}\psi_N\\y_N\\M_N\\V_N\end{Bmatrix}_D$$

现在，这些加起来必须满足末端处的实际边界条件，对悬臂梁的自由端，边界条件是

$$\begin{Bmatrix}\psi\\y\\M\\V\end{Bmatrix}_N=\begin{Bmatrix}\psi\\y\\0\\0\end{Bmatrix}=C_N+\alpha D_N$$

假如所选频率是正确的，则上列边界方程导致

$$M_{NC}+\alpha M_{ND}=0$$

$$V_{NC}+\alpha V_{ND}=0$$

$$\alpha=-\frac{M_{NC}}{M_{ND}}=-\frac{V_{NC}}{V_{ND}}$$

上式被下列行列式所满足

$$\begin{vmatrix}M_{NC} & V_{NC}\\M_{ND} & V_{ND}\end{vmatrix}=0$$

可用三个不同的频率开始反复试凑，得出三个行列式值。作

抛物线通过这三点，曲线的零点被选为频率的新的估计。当频率接近正确值时，可用两个边界行列式值之间的直线作出新的估计。

8.9 拉普拉斯变换的瞬态解

连续系统对任意指定边界条件的响应可以有利地应用拉普拉斯变换法来审察。因为弦问题以及细长杆的纵向运动和扭转运动问题都具有相同的微分方程，我们可以用与起始时处于静止状态的系统相当的起始条件 $u(x,0)=u'(x,0)=0$来审察方程

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u^2}{\partial t^2} \tag{8.9-1}$$

我们首先取对时间 t 的拉普拉斯变换$\bar{u}(x,s)$，把上列方程简化为以 x 为自变量的常微分方程

$$c^2\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}(x,s)=s^2\bar{u}(x,s) \tag{8.9-2}$$

上列方程的一般解是

$$\bar{u}(x,s)=C_1e^{(s/c)x}+C_2e^{-(s/c)x} \tag{8.9-3}$$

式中常量C_1和C_2将决定于边界条件。就在这一点上，必须规定物理问题以便提出与实际一致的边界条件。

弦 我们来研究终端 $x=0$ 处具有任意指定运动的无限长弦。于是量$u(x,t)$代表弦的横向运动，$c=\sqrt{T/\rho}$代表任一扰动沿张力为T、单位长度质量为ρ之弦的传播速度。

在很远端 $x=l\to\infty$处，位移必须为零，这就要求$C_1=0$。在弦端 $x=0$ 处，位移指定为$u(0,t)$，因而 $C_2=\bar{u}(0,s)$。于是一般解变为

$$\bar{u}(x,s)=\bar{u}(0,s)e^{-(s/c)x}$$

应用第二移位原理（参见附录B）

$$\mathscr{L}^{-1}e^{-as}\bar{f}(s)=f(t-a)\,u(t-a)$$

$u(x,t)$ 的时间解变为

$$u(x,t)=u\left(0,t-\frac{x}{c}\right)u\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

这可以解释如下：当 $t<x/c$ 时，单位函数$u(t-x/c)$为零，所以直到时间 $t=x/c$ 为止，离原点 x 单位处的弦保持静止。在 $t=x/c$ 以后，x 处的弦就经历与弦端 $x=0$处指定运动相同的运动。于是很显然，弦端 $x=0$ 处的指定运动以传播速度 c 沿着弦运移，如图 8.9-1 所示。

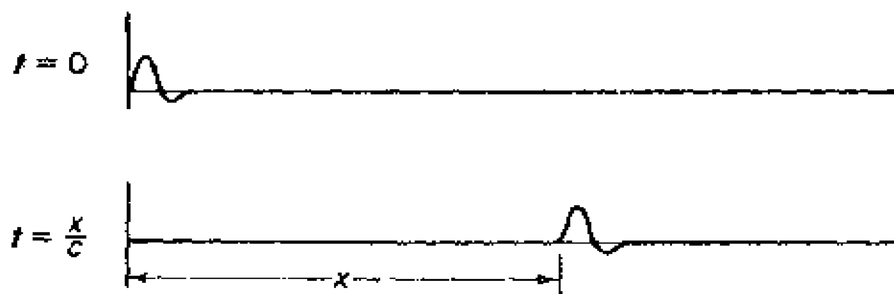


图 8.9-1

杆的纵向运动 这里，我们来研究一根在 $x=0$ 处被固定并在自由端 $x=l$ 处施加力 $F(l,t)$ 的杆。这时，纵向位移是具有扰动传播速度为 $c=\sqrt{Eg/\rho}$的 $u(x,t)$。

边界条件为

$$\bar{u}(0,s)=C_1+C_2=0$$

$$AE\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\ (l,s)=AE\frac{s}{C}(C_1e^{sl/c}-C_2e^{-sl/c})=\bar{F}(l,s)$$

解出C_1和C_2，我们得

$$C_1=-C_2=\frac{c\bar{F}(l,s)}{2AEs\cosh\frac{sl}{c}}$$

以及

$$\bar{u}(x,s)=\frac{\bar{F}(l,s)\sinh\frac{sx}{c}}{AE\frac{s}{c}\cosh\frac{sl}{c}}$$

因为位移是速度对时间的积分，我们可用 $(1/s)\cdot \bar{v}(x,s)$ 来代替 $\bar{u}(x,s)$，并得出杆端 $x = l$ 处的速度和力 $F(l,t)$ 之间的一般表达式如下

$$\bar{F}(l,s) = \bar{v}(l,s)\left(\frac{AE}{c}\right)\coth\left(\frac{sl}{c}\right)$$

$$= \bar{v}(l,s)\left(\frac{AE}{c}\right)[1 + 2e^{-2(sl/c)} + 2e^{-4(sl/c)} + \cdots\cdots]$$

再应用第二移位原理，我们得

$$F(l,t) = \left(\frac{AE}{c}\right)\left[v(l,t) + 2v\left(l, t - \frac{2l}{c}\right)\cdot\left(t - \frac{2l}{c}\right) + \right.$$

$$\left. + 2v\left(l, t - \frac{4l}{c}\right)\cdot\left(t - \frac{4l}{c}\right) + \cdots\cdots\right]$$

上列解说明直到时间 $t = 2l/c$ 为止，端部力正比于自由端的速度 $v(l,t)$，在那一瞬间，从固定端的反射引入了附加项 $2v(l, t - 2l/c)$，等等。

属于这种形式的许多其它问题可以类似地应用拉普拉斯变换法来处理；读者可以参见拉普拉斯变换❶。

习　　题

8-1　当绳索密度为1/4磅/英尺、并被拉伸到张力为100磅时，求出沿绳索传播的波速。

8-2　导出一根两端固定、长度为 l 的均匀细绳的固有频率方程。这根细绳被拉伸到张力 T，它的单位长度质量是 ρ。

8-3　一根长度为 l、单位长度质量为 ρ 的细绳处于张力 T 作用之下，其左端固定，右端联在一个弹簧-质量系统上，如图P.8-3所示。求出固有频率的方程。

8-4　一简谐振动具有沿 x 方向按余弦函数变化的振幅，使得

$$y = a\cos kx\cdot\sin\omega t$$

试证假如另一个具有同样频率和振幅、但空间相位和时间相位差四分

---

❶ W.T.Thomson, *Laplace Transformation*, 2nd ed (Engelewood Cliffs, N.J.: Prenfice-Hall, Inc.,1960), Chapter 8.

之一波长的简谐振动被加到第一个振动中去时，合振动将代表一个传播速度等于$c=\omega/k$的运移波。

8-5 求出沿一细长钢棒的纵波速度。钢的弹性模量和单位容积重量分别为29×10^6磅/英寸^{2}和0.282磅/英寸^3。

8-6 一根长度为l的均匀棒一端固定，另一端自由。证明标准纵向振动的频率是$f=(n+\frac{1}{2})c/2l$，式中$c=\sqrt{Eg/\rho}$是棒内纵向波的速度，$n=0,1,2,\cdots\cdots$

8-7 一根长度为l、断面面积为A的均匀杆上端固定，另一端承载着重量W。试证固有频率由下式确定

$$\omega l\sqrt{\frac{\rho}{Eg}}\ \tan\omega l\sqrt{\frac{\rho}{Eg}}=\frac{A\rho l}{W}$$

8-8 试证习题8-7中系统的基本频率可以表示为如下形式

$$\omega_1=\beta_1\sqrt{k/rM}$$

式中

$$n_1 l=\beta_1,\qquad r=\frac{M_{杆}}{M},$$

$$k=\frac{AE}{l},\qquad M=\text{终端质量}$$

将上列系统化成弹簧k和一个等于$M+\frac{1}{3}M_{杆}$的终端质量，求出基本频率的近似公式。试证近似频率对上面求得的准确频率之比为$(1/\beta_1)\sqrt{3r/(3+r)}$。

8-9 磁致伸缩振荡器的频率决定于镍合金杆的长度，这根镍合金杆使围绕它的线卷中产生等于杆纵向振动频率的交流电压，如图 P.8-9所示。确定频率为20千周/秒时，中点被夹牢的杆的正确长度，假如弹性模量和密度分别给定为$E=30\times10^6$磅/英寸^{2}和$\rho=0.31$磅/英寸^3。

8-10 试证$c=\sqrt{Gg/\rho}$是沿杆的扭转变形传播速度。对于钢，c的数值是多少？

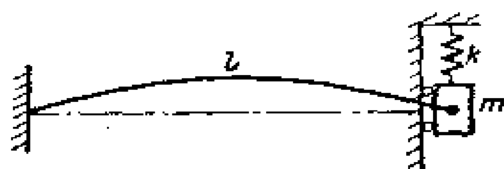


图 P.8-3

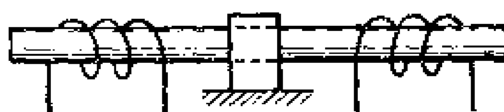


图 P.8-9

8-11 确定一根长度为 l、中央夹牢、两端自由的均匀杆扭转振动时的固有频率表达式。

8-12 确定由一根质量惯矩为 J_s、两端各带一个惯矩为 J_0 之圆盘的均匀轴所组成的扭转系统的固有频率。把均匀轴化成带有终端质量的扭转弹簧后校核基本频率。

8-13 确定一根两端自由的棒横向振动时的固有频率表达式。

8-14 用瑞利法确定两端自由梁之主振型的节点位置，假设曲线是 $y=\sin(\pi x/l)-b$。用动量等于零确定 b。将 b 值代入求出 ω_1。

8-15 一根2×2×12英寸的混凝土试验梁支承在离端部0.224l的两点上，发现在1690周/秒时出现共振。假如混凝土的密度是153磅/英尺³，试确定弹性模量，假设梁是细长的。

8-16 确定一根两端固定、长度为 l 的均匀梁的固有频率。

8-17 确定一根长度为 l、一端固定、另一端铰支的均匀梁的固有频率。

8-18 一根长度为 l、重量为 W_b 的均匀梁一端固定，另一端带有集中重量 W_0。说明边界条件和确定频率方程。

8-19 一根铰支-自由梁的铰支端被给予沿梁垂直方向振幅为 y_0 的谐运动。试证边界条件得出方程式

$$\frac{y_0}{y_1}=\frac{\sinh\beta l\cos\beta l-\cosh\beta l\sin\beta l}{\sinh\beta l-\sin\beta l}$$

当 $y_0\to 0$ 时，上式化为

$$\tanh\beta l=\tan\beta l$$

8-20 一根均匀棒具有这样一些尺寸：长度 l，单位容积的质量密度 ρ，以及扭转刚度 I_pG，其中 I_p 是断面的极惯矩，G 是剪切模量。端部 $x=0$ 处被刚度为 K 磅·英寸/弧度的扭转弹簧握住，而端部 l 处则如图P.8-20所示被固定。确定从中能确立固有频率的超越方程。利用 $K=0$ 和 $K=\infty$ 的特殊情况证明这一方程的正确性。

8-21 一根简支梁具有长度为 l_2 的悬臂，如图P.8-21所示。假如悬臂的端部是自由的，试证边界条件要求每跨的挠度方程为

$$\phi_1=C\left(\sin\beta x-\frac{\sin\beta l_1}{\sinh\beta l_1}\sinh\beta x\right)$$

$$\phi_2=A\left\{\cos\beta x+\cosh\beta x-\left(\frac{\cos\beta l_2+\cosh\beta l_2}{\sin\beta l_2+\sinh\beta l_2}\right)(\sin\beta x+\sinh\beta x)\right\}$$

式中 x 从左端和右端开始计量。

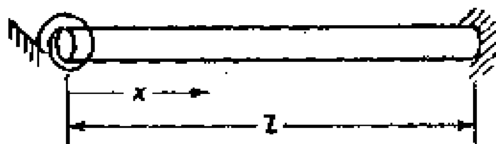


图 P.8-20

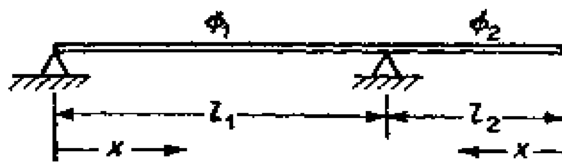


图 P.8-21

8-22 一特殊卫星由每个为m的两个相等质量组成，质量之间用一根长度为$2l$、质量密度为ρ的缆索联结起来，如图P.8-22 所示。这个集合体以角速 ω_0 在空间转动。试证假如缆索张力的变动略去不计时，缆索的横向运动微分方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\rho}{m\omega_0{}^2 l}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\omega_0{}^2 y\right)$$

以及它的基本振动频率为

$$\omega^2=\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\left(\frac{m\omega_0 l}{\rho}\right)-\omega_0{}^2$$

8-23 图 P.8-23所示为一根支承在上端并可在重力影响下自由振荡的挠性缆索。试证横向运动方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=g\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

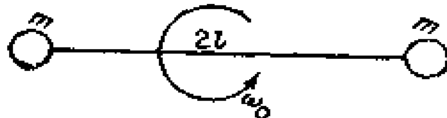


图 P.8-22

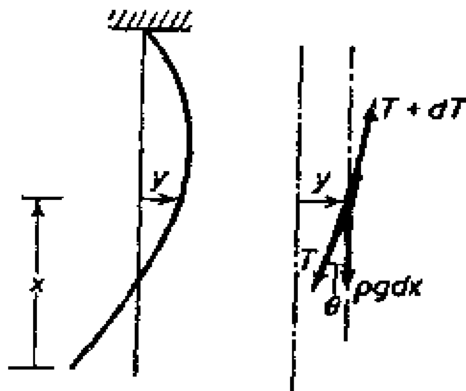


图 P.8-23

8-24 在习题 23 中，假设解的形式是 $y=Y(x)\cos\omega t$，试证应用变量替换 $Z^2=4\omega^2 x/g$ 后，$Y(x)$ 可以转化为贝塞耳微分方程

$$\frac{d^2Y(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dY(z)}{dz}+Y(z)=0$$

并具有解

$$Y(z) = J_0(z) \text{或} Y(x) = J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)$$

8-25 一张薄膜用极大的张力T磅/英寸张紧，以致它的横向挠度y并不显著地使T增加。采用极坐标，试证横向振动的微分方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}\right)$$

8-26 对一个半径为a、边界条件为$y(a)=0$的圆形薄膜应用习题25的结果。没有径向节线之对称振型的挠度可被表示为由$J_0(r\sqrt{\rho\omega^2/T})$所给定。对于径向和周向节点的一般情形，固有频率可从$r=a$和$r=0$处的边界条件计算出来，其结果是一个下列形式的方程

$$\omega = \frac{\alpha_{n,m}}{a}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

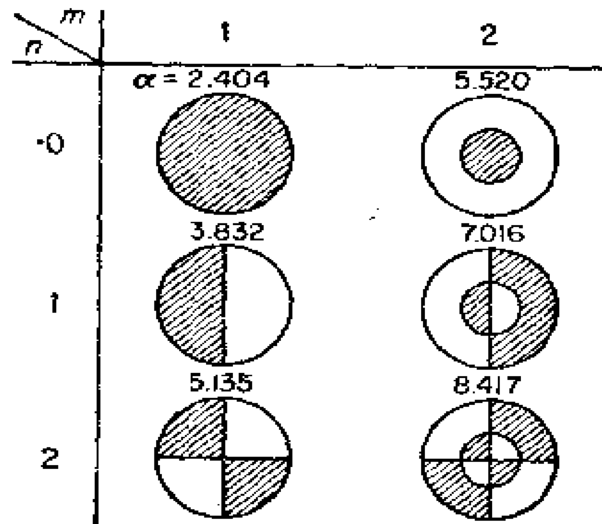


图 P.8-26 薄膜的挠度

式中n归结为径向节点数，m归结为包括外周边界在内的周向节点数。少数形状示于图P.8-26中。

8-27 带有粘性阻尼之细长杆的纵向振荡方程是

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p_0}{l}\ p(x)\, f(t)$$

式中单位长度的荷载假设是可分离的。

令$u = \Sigma_i \phi_i(x) q_i(t)$和$p(x) = \Sigma_i b_i \phi_i(x)$，试证

$$u=\frac{p_0}{ml\sqrt{1-\zeta^2}}\sum_i \frac{b_i\phi_i}{\omega_i}\int_0^t f(t-\tau)e^{-\zeta\omega_i\tau}\sin\omega_i\sqrt{1-\zeta^2}\,\tau d\tau$$

$$b_i=\frac{1}{l}\int_0^l p(x)\phi_i(x)dx$$

导出任一点 x 处的应力方程。

8-28 假设图8.7-2所示长方形薄膜的各边是夹牢的，试证明它的解是

$$w(x,y,t)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{a}(A_{mn}\sin\omega_{mn}t+B_{mn}\cos\omega_{mn}t)$$

8-29 试证习题8-28中薄膜的固有频率由下式给出

$$\omega_{mn}^2=c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{a^2}\right)$$

式中m，$n=1$，2，3，……

8-30 描绘各边夹牢之方形薄膜的固有振型形状。

8-31 当包括剪切和转动惯量时，试证明梁的微分方程可用下列一阶矩阵方程来表示

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix}\psi\\ y\\ M\\ V\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{EI}&0\\ 1&0&0&\frac{-1}{kAG}\\ -\omega^2J&0&0&1\\ 0&\omega^2m&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi\\ y\\ M\\ V\end{Bmatrix}$$

8-32 对图 P.8-32所示梁的支承方式，确定位置 2 的有限差分方程。

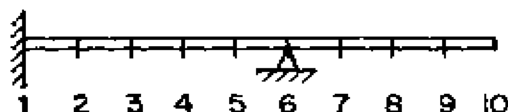


图 P.8-32

8-33 对习题32的梁，建立适用于位置 5 和 7 的有限差分方程式。

8-34 对习题32的梁，导出位置 9 和10的有限差分方程式。

8-35 一根长度为 l 、两端固定的弦处于张力T作用之下。在 $x=0$处，弦被给予一个初速

$$v(0,t)$$

确定它的运动。

8-36 一个长度为 l 、刚度为 k的螺旋弹簧在松弛状态下放在一个无摩擦的水平平面上。假如在端部 $x=0$处给予一个指定的速度 $v(0, t)$，试确定任一点x的运动。弹簧中x点处的应力是多少？

第九章　拉格朗日方程

9.1　导引

拉格朗日[1]导出了从动能T、势能U和功W的标量上建立公式的动力系统一般处理方法。当系统变得愈来愈复杂时，牛顿定律所需矢量关系的建立变得愈来愈困难，在这类情况下，建立在能和功基础上的标量处理提供了很大的有利条件。此外，在按拉格朗日公式建立的运动方程中，无摩擦铰和无摩擦导向装置的约束力可以全部不予考虑。

9.2　广义坐标

一个系统的运动方程可在多种不同的坐标系统中建立。可是，要描写一个n自由度系统的运动总是需要n个独立的坐标。这些独立的坐标称为**广义坐标**，常用字母q_i来表示。

物体的运动并非都是自由运动，常常是被迫按预定方式运动。图 9.2-1 所示长度为l的球摆可以作为一个例子。它的位置可用两个独立坐标ψ和ϕ完全确定。因此，ψ和ϕ是广义坐标，而球摆则代表一个两自由度的系统。

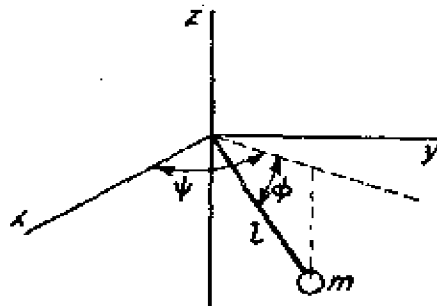


图 9.2-1

球摆的位置也可用三个直角坐标x，y，z来描写，它们比系统的自由度数目超过一。可是，坐标x，y，z并不是独立的，因为它们被下列**约束方程**联系在一起

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0 \tag{9.2-1}$$

[1] Joseph L.C. Lagrange (1736-1813).

坐标之一可以从上式中消去，从而使必要的坐标数减为两个。

超过系统自由度数目的过剩坐标称为多余坐标，为了消去多余坐标，需要有数目上等于多余坐标数的约束方程。假如过剩坐标能够通过约束方程消去，则该约束称为完全约束。这类约束的形式是

$$C(q_1,\ q_2,\ \cdots q_n,\ t)=0 \qquad (9.2\text{-}2)$$

在非完全约束系统中，约束不能象式（9.2-2）那样由坐标或坐标和时间来表示。非完全约束仅能用微分之间的关系来表示，如下列方程所示

$$a_1dq_1+a_2dq_2+\cdots a_m dt=0 \qquad (9.2\text{-}3)$$

因此，用代数方法是不可能消去非独立坐标的。

9.3 虚功原理

虚位移δx，$\delta\theta$，δr等等是坐标的微量变化，这种变化可与时间无关地以任意方式进行设想，但不能违反系统的约束。

设想一个质点系统上作用着几个力。假如系统处于静平衡状态，则作用在任一质点 j 上的力的合力 R_j 必须是零，这些力在虚位移δr_j 上所作的功是零

$$\delta W=\sum_j \mathbf{R}_j\cdot\delta\mathbf{r}_j=0 \qquad (9.3\text{-}1)$$

假如力R_j被分解为一个作用力F_j和一个约束力f_i，则F_j被f_i所平衡，每个力都不为零。让我们的讨论限于不作功的约束力，例如光滑地面上的反力，则虚功方程变为

$$\delta W=\sum_i \mathbf{F}_j\cdot\delta\mathbf{r}_j=0 \qquad (9.3\text{-}2)$$

它表明了由 J．贝努利（1717）提出的虚功原理。总之，上列公式说明，假如一个系统处于静平衡状态，则作用力在虚位移上和约束力一起作出的功等于零。

用广义坐标表示的虚功　设想一个 n 自由度的系统，其位移r_j可用 n 个独立广义坐标q_i和时间 t 来表示

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q_1,\ q_2,\ \cdots q_n,\ t) \tag{9.3-3}$$

坐标r_j的虚位移是

$$\delta\mathbf{r}_j = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}\delta q_i \tag{9.3-4}$$

时间 t 是不包括的。

当这个系统处于平衡状态时，虚功可用式（9.3-4）所示广义坐标来表示

$$\delta W = \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \delta\mathbf{r}_j = \sum_j \sum_i \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}\delta q_i \tag{9.3-5}$$

变换总和的次序，并令

$$Q_i = \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \tag{9.3-6}$$

定义为**广义力**，则以广义坐标表示的这系统的虚功变为

$$\delta W = \sum_i Q_i \delta q_i \tag{9.3-7}$$

例 9.3-1

为了举例说明虚功方法，我们来研究确定刚性棒平衡位置的问题，这根刚性棒在它的运动中受到如图 9.3-1 所示的约束。

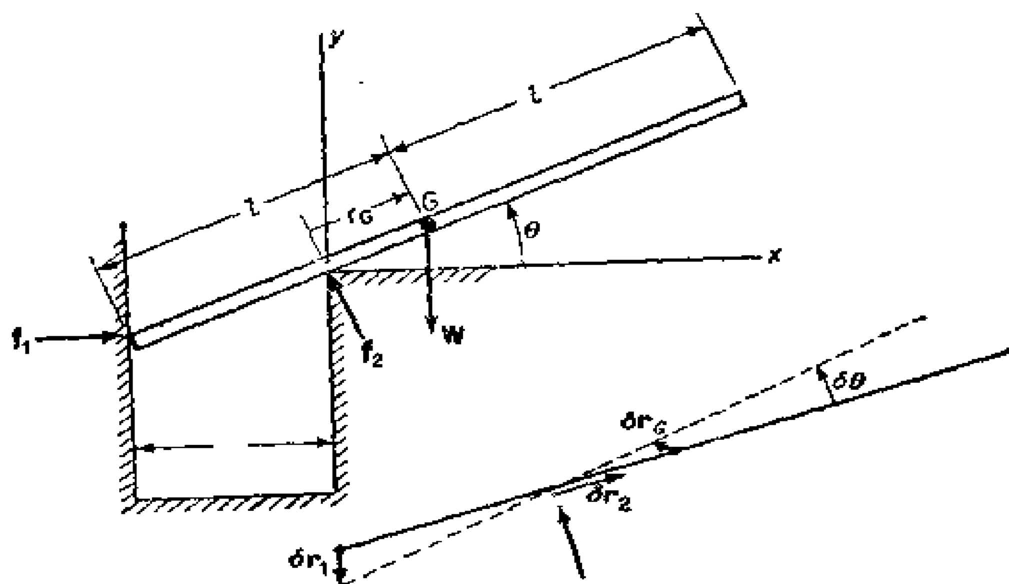


图 9.3-1

棒的位置由坐标θ完全确定，这一θ可以作为广义坐标对待。假如这棒被给予一个虚位移$\delta\theta$，则在系统的约束下，点1、2和G必须伴随产生相应的位移δr_1、δr_2和δr_G。这些位移都可以通过$\delta\theta$来表示，这个$\delta\theta$是唯一可被指定为任意值的独立量。

有两种力作用在这根棒上。约束力是f_1和f_2，而重力w是一个作用力。假设接触处没有摩擦，则约束力f_1和f_2相应地垂直于虚位移δr_1和δr_2，所以当这棒经历一个虚位移$\delta\theta$时，约束力不作功。这样，系统的虚功仅由作用力产生

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{f}_1\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_2\cdot\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{w}\cdot\partial\mathbf{r}_G \\ &= 0 + 0 + \mathbf{w}\cdot\partial\mathbf{r}_G\end{aligned}$$

因为$\mathbf{r}_G$是θ的某种函数，我们可以写成

$$\partial\mathbf{r}_G = \frac{\partial\mathbf{r}_G}{\partial\theta}\delta\theta$$

虚功方程变为

$$\delta W = \mathbf{w}\frac{\partial\mathbf{r}_G}{\partial\theta}\delta\theta = Q_\theta\delta\theta$$

在上式中

$$Q_\theta = \mathbf{w}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_G}{\partial\theta}$$

是与广义坐标θ相关的广义力。

应用沿x轴和y轴方向的单位矢量$\mathbf{i}$和$\mathbf{j}$（参见图9.3-1），则$\mathbf{r}_G$的算式是

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_G &= r_G(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta) \\ &= \left(l - \frac{c}{\cos\theta}\right)(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta)\end{aligned}$$

对θ微分，得

$$\delta\mathbf{r}_G = [(-l\sin\theta)\mathbf{i} + (l\cos\theta - c\sec^2\theta)\mathbf{j}]\delta\theta$$

取$\delta\mathbf{r}_G$与$\mathbf{w} = -w\mathbf{j}$的数量积，得必须是零的虚功为

$$\delta W = -w(l\cos\theta - c\sec^2\theta)\delta\theta = 0$$

上式被下式所满足

$$(l\cos\theta - c\sec^2\theta) = 0$$

或

$$\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{c}{l}}$$

上式确定了棒的平衡位置。读者可证明这样一个事实，即质量中心G在上列位置中占有最低❶点，而且δr_G是一个水平位移。

9.4 拉格朗日方程的导出

从静平衡状态确立的虚功原理可以根据达兰贝尔(1743)发展的推论被引伸到动力学范畴。达兰贝尔推论出，由于作用在一个质点上的力的总和引起质点的加速度$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$，则引入一个等于$-m_i\ddot{\mathbf{r}}$的力将造成一个平衡条件。于是，质点的方程式可以写成

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \qquad (9.4-1)$$

式中$\mathbf{F}_i$和$\mathbf{f}_i$依次为作用力和约束力。于是根据虚功原理，对一个质点系统可得

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad (9.4-2)$$

这里，约束力$\mathbf{f}_i$所作之功仍然是零。这样，对于一个动力系统，虚功原理要求作用力$\mathbf{F}_i$用$(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)$来代替，它引入一个新的项$\Sigma_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i$。现在，我们将表明，这一新的项是以下式与动能$T$有关的

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\delta q_k$$

设想一个物体能被一个质点系统来代表，它的动能等于

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i \qquad (9.4-3)$$

对于一个n自由度的系统，任一质点的位置可用n个广义坐标以及有时还有时间t来表示，

---

❶ 应为最高点，是个不稳定平衡位置——译校注。

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \tag{9.4-4}$$

它的速度是

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{9.4-5}$$

从这些式子中，我们建立起两个重要的关系。第一，假如我们取$\dot{\mathbf{r}}_i$对$\dot{q}_k$的偏导数，它将等于$\dot{q}_k$的系数

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \tag{9.4-6}$$

第二，从式(9.3-4)，$\mathbf{r}_i$ 的虚位移是

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \tag{9.4-7}$$

这里应该注意，时间 t 并不列入方程（虚位移的定义与时间无关）。

应用上面关于$\delta \mathbf{r}_i$的方程，我们有

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\delta q_K \tag{9.4-8}$$

其次，观察上列总和中的某一项

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right) \tag{9.4-9}$$

从式(9.4-6)，第一项中的$\partial \mathbf{r}_i/\partial q_k$ 可用$\partial \dot{\mathbf{r}}_i/\partial \dot{q}_k$来代替，而第二项中的微分次序可倒转为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}$$

其结果是

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \\ &= \left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right\}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i\right) \end{aligned} \tag{9.4-10}$$

以及

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial}{\partial q_k}\right]\left(\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^{\,2}\right)\delta q_k \tag{9.4-11}$$

对全部 i 质点进行总和，我们得到结果为

$$\sum_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\delta q_k \tag{9.4-12}$$

式中 $T=\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{r}_i^{\,2}$ 是系统的动 能。

为了完成导出过程，作用力在虚位移上所作之功写成

$$\begin{aligned}\delta W&=\sum_i\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=\sum_i\mathbf{F}_i\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_i\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k\\&=\sum_{k=1}^{n}Q_k\delta q_k\end{aligned} \tag{9.4-13}$$

式中

$$Q_k=\sum_i\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k} \tag{9.4-14}$$

称为与坐标 q_k 相关的广义力。Q_k 的因次将决定于 q_k 的因次，从而，假如q_k 是一个角度θ，则广义力将是一个力矩。

现在，我们把式（9.4-12）和式（9.4-13）回代到原始方程(9.4-2)中，得

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0 \tag{9.4-15}$$

因为与 n 个自由度相应的n个δq_k是独立量，我们可用我们所喜欢的任意方式选定它们。单一地选出 δq_k 中之一不等于零并令其余的δq_s等于零，我们得到对坐标q_j 的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j=0 \tag{9.4-16}$$

对其它坐标重复这一过程，可以为系统的 n 个坐标 建 立 类 似的方程。

有几个拉格朗日方程的变形，现在可以说一说这些变形。假如我们有一个保守系，作出的功等于势能的负值

$$W = -U(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{9.4-17}$$

则公式(9.4-13)的虚功可用下式来取代

$$\delta W = -\sum \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k \tag{9.4-18}$$

这样，我们可用 $-(\partial U/\partial q_k)$ 取代Q_k，把拉格朗日方程改写成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \tag{9.4-19}$$

第二种变形产生于认定U并不是$\dot{q}$的一个函数，从而，假如我们定义拉格朗日变量L为

$$L = T - U \tag{9.4-20}$$

我们可以把方程(9.4-19)写成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{9.4-21}$$

当系统中存在非保守力时，则非保守力所作之功可以下列形式分离出来

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_k \delta q_k \tag{9.4-22}$$

在这种情况下，对非保守系的拉格朗日方程可以表示为

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \overline{Q}_k \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \overline{Q}_k \end{aligned} \tag{9.4-23}$$

这些最后形式使我们能将拉格朗日法的应用引伸到非保守系，所以拉格朗日法对包括阻尼振动在内的所有动力系统都是可以应用的。

9.5 广义刚度和广义质量

在保守系中，力可以从势能U导出，而势能U则是广义坐标q_j

的一个函数。把U围绕平衡位置展开成泰勒级数，则对于n自由度的系统，我们有

$$U = U_0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)_0 q_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j\,\partial q_l}\right)_0 q_j q_l + \cdots \tag{9.5-1}$$

在上式中，U_0是一任意常量，我们可以令其等于零。U的导数在平衡位置0处算出，当q_j是很小的量并在平衡位置上等于零时，U的导数是常量。因为在平衡位置上U达最小值，一阶导数$(\partial U/\partial q_j)_0$是零，它仅剩下$(\partial^2 U/\partial q_j\cdot\partial q_l)_0$及更高阶项。

在围绕平衡位置的小振荡理论中，超过二阶的项是略去不计的，势能方程简化为

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j\partial q_l}\right)_0 q_j q_l \tag{9.5-2}$$

在0处算出的二阶导数是一常量，它与下列广义刚度相关

$$k_{jl} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j\partial q_l}\right)_0 \tag{9.5-3}$$

势能可写成

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} k_{jl} q_j q \\ &= \frac{1}{2}\{q\}'[k]\{q\} \end{aligned} \tag{9.5-4}$$

根据定义，动能等于

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{r}_i|^2 \tag{9.5-5}$$

应用广义坐标后，速度$\dot{r}_i$等于

$$\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{9.5-6}$$

设想一个硬化系统，那里约束与时间无关，则上式中的最后一项为零，于是我们有

$$|\dot{\mathbf{r}}_i|^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_j\dot{q}_l \tag{9.5-7}$$

这样，动能方程变为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_j\dot{q}_l\right] \tag{9.5-8}$$

现在，我们变换总和的次序，并把上式改写成

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\dot{q}_j\dot{q}_l\left(\sum_{i}^{n}m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\right) \tag{9.5-9}$$

定义广义质量为

$$m_{jl}=\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\right) \tag{9.5-10}$$

动能可以写成

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}m_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l=\frac{1}{2}\{\dot{q}\}'[m]\{\dot{q}\} \tag{9.5-11}$$

从公式（9.5-3）和（9.5-10）中可以清楚地看出$k_{jl}=k_{lj}$和$m_{jl}=m_{lj}$。这样，刚度和质量矩阵都是对称于对角线。

将T和U代入拉格朗日方程就得出一方程组，这些方程可用下列矩阵方程来表示

$$[m_{jl}]\{\ddot{q}\}+[k_{jl}]\{q\}=0 \tag{9.5-11a}$$

当特征向量$\{q\}$为正则（主）坐标时，矩阵方程中的非对角线项为零，运动方程转化为

$$m_{ii}\ddot{q}_i+k_{ii}q_i=0 \tag{9.5-12}$$

于是，其解为主振动振型$q_i=A_i\sin\omega_i t$，它代入微分方程后的结果是

$$k_{ii}=-\omega_i^2 m_{ii} \tag{9.5-13}$$

应用正则坐标将消去所有k_{lj}和m_{lj}项，这里$j\neq l$，所以动能和势能表达式简化为如下形式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i}m_{ii}\dot{q}_i^2=\frac{1}{2}\{\dot{q}\}'[m]\{\dot{q}\} \tag{9.5-14}$$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i}k_{ii}q_i^2=\frac{1}{2}\{q\}'\lceil k\rfloor\{q\} \qquad (9.5\text{-}15)$$

式中$\lceil\ \rfloor$表示对角矩阵。

9.6 振型合成法

在第6.7节中，运动方程曾通过振型矩阵解偶得出以系统的主坐标表示的强迫振动的解。在本节中，我们应用类似技术于连续系统，方法是把挠度展开成系统的主振型。

例如，我们来研究一根受到分布力$p(x,t)$作用之梁的一般运动，它的运动方程是

$$[EIy''(x,t)]''+m(x)\ddot{y}(x,t)=p(x,t) \qquad (9.6\text{-}1)$$

这样一根梁的主振型$\phi_i(x)$必须满足方程

$$(EI\phi''_i)''-\omega_i^2m(x)\phi_i=0 \qquad (9.6\text{-}2)$$

和它的边界条件。主振型$\phi_i(x)$也是正交函数，这函数满足关系式

$$\int_0^l m(x)\phi_i\phi_j dx=\begin{cases}0 & 当 j\neq i 时\\ M_i & 当 j=i 时\end{cases} \qquad (9.6\text{-}3)$$

用$\phi_i(x)$来表示对一般问题的解，得

$$y(x,t)=\sum_i\phi_i(x)q_i(t) \qquad (9.6\text{-}4)$$

在首先确定了动能和势能之后，广义坐标$q_i(t)$可从拉格朗日方程确定。

根据式（9.6-3）的正交关系，动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l\dot{y}^2(x,t)m(x)dx=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\dot{q}_i\dot{q}_j\int_0^l\phi_i\phi_jm(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_iM_i\dot{q}_i^2 \qquad (9.6\text{-}5)$$

式中，广义质量M_i定义为

$$M_i=\int_0^l\phi_i^2(x)m(x)dx \qquad (9.6\text{-}6)$$

类似地，势能为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EIy''^2(x,t)dx=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j q_iq_j\int_0^l EI\phi_i''\phi_j''dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i K_iq_i^2=-\frac{1}{2}\sum\omega_i^2M_iq_i^2 \qquad (9.6\text{-}7)$$ ❶

式中，广义刚度为

$$K_i=\int_0^l EI[\phi_i''(x)]^2dx \qquad (9.6\text{-}8)$$

除了T和U之外，我们还需要广义力Q_i，这一广义力可从作用力$p(x,t)dx$在虚位移δq_i上所作之功来确定

$$\delta W=\int_0^l p(x,t)(\sum_i\phi_i\delta q_i)dx$$

$$=\sum_i\delta q_i\int_0^l p(x,t)\phi_i(x)dx \qquad (9.6\text{-}9)$$

或

$$Q_i=\int_0^l p(x,t)\phi_i(x)dx \qquad (9.6\text{-}10)$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i \qquad (9.6\text{-}11)$$

则$q_i(t)$的微分方程求出为

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2q_i=\frac{1}{M_i}\int_0^l p(x,t)\phi_i(x)dx \qquad (9.6\text{-}12)$$

在这一点上，考虑这样一种情况是方便的，即单位长度上的荷载$p(x,t)$可分离成下列形式

$$p(x,t)=\frac{P_0}{l}p(x)f(t) \qquad (9.6\text{-}13)$$

于是方程（9.6-12）简化为

---

❶ 参见方程式（9.5-13）。

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_0}{M_i}\Gamma_i f(t) \tag{9.6-14}$$

式中

$$\Gamma_i = \frac{1}{l}\int_0^l p(x)\phi_i(x)dx \tag{9.6-15}$$

被定义为振型 i 的振型参与系数。于是方程（9.6-14）的解为

$$q_i(t) = q_i(0)\cos\omega_i t + \frac{1}{\omega_i}\dot{q}_i(0)\sin\omega_i t +$$

$$+\left(\frac{P_0\Gamma_i}{M_i\omega_i^2}\right)\omega_i\int_0^t f(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi \tag{9.6-16}$$

因为展开成 $\phi_i(x)$形式的第 i 个振型静挠度（具有 $\ddot{q}_i(t)=0$）是 $P_0\Gamma_i/M_i\omega_i^2$，故量

$$D_i(t) = \omega_i\int_0^t f(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi \tag{9.6-17}$$

可称为第 i 个振型的动载系数。

例 9.6-1

一根质量为M_0的简支均匀梁突然加上如图9.6-1所示的力。求运动方程。

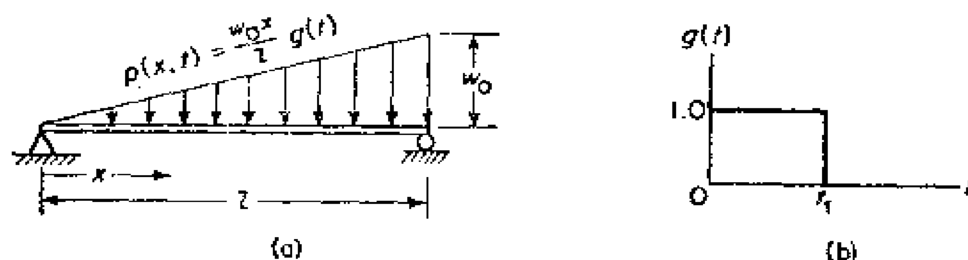


图 9.6-1

解：梁的主振型是

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\omega_n = (n\pi)^2\sqrt{EI/M_0 l^3}$$

广义质量是

$$M_n=\frac{M_0}{l}\int_0^l 2\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=M_0$$

广义力是

$$\int_0^l p(x,t)\phi_n dx=g(t)\int_0^l\frac{w_0x}{l}\sqrt{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=g(t)\frac{w_0\sqrt{2}}{l}\left[\frac{\sin(n\pi x/l)}{(n\pi/l)^2}-\frac{x\cos(n\pi x/l)}{(n\pi/l)}\right]_0^l$$

$$=-g(t)\frac{w_0\sqrt{2}\,l}{n\pi}\cos n\pi$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\,lw_0}{n\pi}g(t)(-1)^n$$

式中$g(t)$为随时间变化的荷载函数。于是，q_n的方程是

$$\ddot{q}_n+\omega_n^2q_n=-\frac{\sqrt{2}\,lw_0}{n\pi M_0}(-1)^ng(t)$$

它的解是

$$q_n(t)=\frac{-\sqrt{2}\,lw_0(-1)^n}{n\pi M_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_nt)\qquad 0\leqslant t\leqslant t_1$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\,lw_0}{n\pi M_0}\cdot\frac{(-1)^n}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_nt)+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}\,lw_0(-1)^n}{n\pi M_0\omega_n^2}[1-\cos\omega_n(t-t_1)]\qquad t_1\leqslant t\leqslant\infty$$

这样，梁的挠度可用下列总和式来表示

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\sqrt{2}\sin\frac{\pi nx}{l}$$

例 9.6-2

一个飞行中的导弹沿纵向被它终端$x=0$处所装火箭发动机的推力$F(t)$所激发。求位移$u(x,t)$和加速度$\ddot{u}(x,t)$的方程。

解：我们假设位移的解是

$$u(x,t)=\sum q_i(t)\varphi_i(x)$$

式中 $\varphi_i(x)$ 是导弹纵向振荡的主振型。广义坐标 q_i 满足微分方程

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2 q_i=\frac{F(t)\varphi_i(0)}{M_i}$$

假如用一个单位脉冲代替$F(t)$作用于$x=0$处，则上列方程当边界条件$q_i(0)=\dot{q}_i(0)=0$时将有解$(\varphi_i(0)/M_i\omega_i)\sin\omega_i t$。这样，对任意力$F(t)$的响应是

$$q_i(t)=\frac{\varphi_i(0)}{M_i\omega_i}\int_0^t F(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi$$

在任一点x处的位移是

$$u(x,t)=\sum_i\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(0)}{M_i\omega_i}\int_0^t F(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi$$

振型 i 的加速度$\ddot{q}_i(t)$可以通过改写微分方程并代入 前 面 对 $q_i(t)$的解来确定

$$\begin{aligned}\ddot{q}_i(t)&=\frac{F(t)\varphi_i(0)}{M_i}-\omega_i^2 q_i\\&=\frac{F(t)\varphi_i(0)}{M_i}-\frac{\varphi_i(0)\omega_i}{M_i}\int_0^t F(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi\end{aligned}$$

这样，任一点 x 的加速度方程求得为

$$\begin{aligned}\ddot{u}(x,t)&=\sum_i\ddot{q}_i(t)\varphi_i(x)\\&=\sum_i\left\{\frac{F(t)\varphi_i(0)\varphi_i(x)}{M_i}-\frac{\varphi_i(0)\varphi_i(x)\omega_i}{M_i}\times\right.\\&\qquad\left.\times\int_0^t F(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi\right\}\end{aligned}$$

例 9.6-3

如图 9.6-2 所示，当一根悬臂梁的基础被给予一个垂直梁轴方向的运动$y_b(t)$时，求这一悬臂梁的响应。

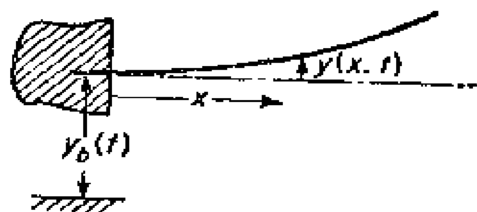


图 9.6-2

解：基础运动时梁的微分方程是

$$[EIy''(x,t)]''+m(x)[\ddot{y}_b(t)+\ddot{y}(x,t)]=0$$

上式可以重新排列成

$$[EIy''(x,t)]''+m(x)\ddot{y}(x,t)=-m(x)\ddot{y}_b(t)$$

这样，我们就用单位长度的惯性力 $-m(x)\ddot{y}_b(t)$ 代替了单位长度的力$F(x,t)$。假设解的形式是

$$y(x,t)=\sum_i q_i(t)\varphi_i(x)$$

广义坐标q_i的方程变为

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2 q_i=-\ddot{y}_b(t)\frac{1}{M_i}\int_0^l \varphi_i(x)dx$$

于是，q_i的解与简单振荡器的解仅差一个因子 $-1/M_i\int_0^l\varphi_i(x)dx$，所以，对起始条件$y(0)=\dot{y}(0)=0$

$$q_i(t)=\left\{-\frac{1}{M_i}\int_0^l \varphi_i(x)dx\right\}\frac{1}{\omega_i}\int_0^t \ddot{y}_b(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi$$

9.7 包括转动惯量和剪切变形的梁的正交性

包括转动惯量和剪切变形的梁的方程曾在第8.6节中导出过。对这种梁，正交性不再由方程式(9.6-3)来表示，而是由下式表示

$$\int[m(x)\varphi_j\varphi_i+J(x)\psi_j\psi_i)dx=\begin{cases}0 & 假如j\neq i\\ M_i & 假如j=i\end{cases}\qquad(9.7\text{-}1)$$

它可以证明如下。

为方便起见，我们把包括单位长度分布力矩 $\mathscr{m}(x,t)$ 的方程(8.6-5)和(8.6-6)重新写出如下

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\psi}{dx}\right)+kAG\left(\frac{dy}{dx}-\psi\right)-J\ddot{\psi}-\mathscr{m}(x,t)=0\qquad(8.6\text{-}5)$$

$$m\ddot{y}-\frac{d}{dx}\left[kAG\left(\frac{dy}{dx}-\psi\right)\right]-p(x,t)=0\qquad(8.6\text{-}6)$$

对于梁单位长度的激励为 $p(x,t)$ 和$\mathscr{m}(x,t)$ 的强迫振荡，挠度$y(x,t)$和弯曲斜率$\psi(x,t)$可用广义坐标表示如下

$$y = \sum_j q_j(t)\varphi_j(x)$$
$$\psi = \sum_j q_j(t)\psi_j(x) \tag{9.7-2}$$

把这些总和代入两个梁方程中，我们得

$$J\sum_j \ddot{q}_j\psi_j = \sum_j q_j\left\{\frac{d}{dx}(EI\psi'_j) + kAG(\varphi'_j - \psi_j)\right\} + m(x,t)$$
$$m\sum_j \ddot{q}_j\varphi_j = \sum_j q_j\frac{d}{dx}\left\{kAG(\varphi'_j - \psi_j)\right\} + p(x,t) \tag{9.7-3}$$

不管怎样，主振型振动具有如下形式

$$y = \varphi_j(x)e^{i\omega_j t}$$
$$\psi = \psi_j(x)e^{i\omega_j t} \tag{9.7-4}$$

把上式代入激励力为零的梁方程式中，得

$$-\omega_j^2 J\psi_j = \frac{d}{dx}(EI\psi'_j) + kAG(\varphi'_j - \psi_j)$$
$$-\omega_j^2 m\varphi_j = \frac{d}{dx}\{kAG(\varphi'_j - \psi_j)\} \tag{9.7-5}$$

这组方程的右边是强迫振动方程中广义坐标q_j的系数，所以我们可把方程（9.7-3）写成

$$J\sum_j \ddot{q}_j\psi_j = -\sum_j q_j\omega_j^2 J\psi_j + m(x,t)$$
$$m\sum_j \ddot{q}_j\varphi_j = -\sum_j q_j\omega_j^2 m\varphi_j + p(x,t) \tag{9.7-6}$$

把这两个方程乘以$\varphi_i dx$和$\psi_i dx$，加起来并积分，我们得

$$\sum_j \ddot{q}_j\int_0^l (m\varphi_j\varphi_i + J\psi_j\psi_i)dx + \sum_j q_j\omega_j^2 \times$$
$$\times\int_0^l (m\varphi_j\varphi_i + J\psi_j\psi_i)dx$$
$$= \int_0^l p(x,t)\varphi_i dx + \int_0^l m(x,t)\psi_i dx \tag{9.7-7}$$

在这些方程中，假如q是广义坐标，则它们必须是独立坐标，

这些坐标满足方程

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2 q_i=\frac{1}{M_i}\left\{\int_0^l p(x,t)\varphi_i dx+\int_0^l m(x,t)\ \psi_i dx\right\}$$

(9.7-8)

于是我们可以看出，这一要求仅在下列情况下才满足

$$\int_0^l (m\varphi_j\varphi_i+J\psi_j\psi_i)dx=\begin{cases}0 & 假如 j\neq i\\ M_i & 假如 j=i\end{cases} \tag{9.7-9}$$

上式确立了包括转动惯量和剪切变形时梁的正交性。

9.8 受约束结构的主振型

当一个结构由于添加了一个质量或一个弹簧而改变时，我们称它为受约束的结构。例如，一个弹簧在其作用点上将对结构的运动表现为一个约束，有可能增加系统的固有频率。相反，一个附加的质量可以降低系统的固有频率。这类问题可以通过广义坐标和振型合成法建立公式关系。

我们来研究任一单维结构(即结构上的点决定于一个坐标x)在单位长度力$f(x,t)$和单位长度力矩$M(x,t)$激励下的强迫振动。假如我们知道结构的主振型、ω_i和$\varphi_i(x)$，则它在任一点x处的挠度可以表示为

$$y(x,t)=\sum_i q_i(t)\varphi_i(x) \tag{9.8-1}$$

式中的广义坐标q_i必须满足方程

$$\ddot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=\frac{1}{M_i}\left[\int f(x,t)\varphi_i(x)dx+\int M(x,t)\varphi'_i(x)dx\right]$$

(9.8-2)

上式的右边是$1/M_i$乘以广义力Q_i，这一广义力可由施加力的虚功$Q_i=\delta W/\delta q_i$中求得。

假如，我们有作用于点$x=a$处的一个集中力$F(a,t)$和一个集中力矩$M(a,t)$来代替分布荷载，则在这种荷载下，广义力可从下式求出

$$\delta W = F(a,t)\delta y(a,t) + M(a,t)\delta y'(a,t)$$

$$= F(a,t)\sum_i \varphi_i(a)\delta q_i + M(a,t)\sum_i \varphi'_i(a)\delta q_i$$

$$Q_i = \frac{\delta W}{\delta q_i} = F(a,t)\varphi_i(a) + M(a,t)\varphi'_i(a) \tag{9.8-3}$$

于是，我们得到下列方程来代替方程（9.8-2）

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{M_i}\left\{F(a,t)\varphi_i(a) + M(a,t)\varphi'_i(a)\right\} \tag{9.8-4}$$

这些方程构成了分析受约束结构的起始点，条件是约束可用作用于结构上的外载来表示。

作为一个例子，让我们来研究把一个线形弹簧和一个扭转弹簧联结到图9.8-1所示的简支梁上。线形弹簧在梁上施加一个力，其值等于

$$F(a,t) = -ky(a,t) = -k\sum_j q_j(t)\varphi_j(a) \tag{9.8-5}$$

而扭转弹簧则施加一个力矩

$$M(a,t) = -Ky'(a,t) = -K\sum_j q_j(t)\varphi'_j(a) \tag{9.8-6}$$

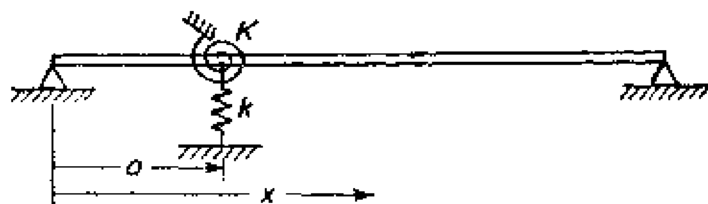


图 9.8-1

把这些方程代入式（9.8-4）中，我们得

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i}\left\{-k\varphi_i(a)\sum_j q_j\varphi_j(a) - K\varphi'_i(a)\sum_j q_j\varphi'_j(a)\right\} \tag{9.8-7}$$

受约束振型的主振型仍然是简谐型的，所以我们可写成

$$q_i = \bar{q}_i e^{i\omega t}$$

于是，对第 i 方程的解是

$$\bar{q}_i = \frac{1}{M_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \left[-k\varphi_i(a) \sum_j \bar{q}_j \varphi_j(a) - K\varphi'_i(a) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_j \bar{q}_j \varphi'_j(a) \right] \qquad (9.8\text{-}8)$$

假如我们应用n个振型，将有n个$\bar{q}_j$值，以及如上面公式之一的 n 个方程。于是，由$\bar{q}_i$的系数组成的行列式将导出受约束振型的固有频率，而受约束结构的振型形状则可以通过把$\bar{q}_j$代入式(9.8-1)求得。

假如在点$x = a$处放一质量m_0以代替弹簧，如图9.8-2 所示，则由m_0施加到梁上的力是

$$F(a, t) = -m_0 \ddot{y}(a, t) = -m_0 \sum_j \ddot{q}_j \varphi_j(a) \qquad (9.8\text{-}9)$$

这样，代替方程式（9.8-8），我们将得到方程

$$\bar{q}_i = \frac{1}{M_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \left[\omega^2 m_0 \varphi_i(a) \sum_j \bar{q}_j \varphi_j(a) \right] \quad (9.8\text{-}10)$$

例9.8-1

试给出一简支梁固有频率的单一振型近似式，当这梁的$x = l/3$处加上一个质量m_0时。

解：当仅应用一个单一振型时，方程（9.8-10）简化为

$$M_1(\omega_1^2 - \omega^2) = \omega^2 m_0 \varphi_1^2(a)$$

解出ω^2，我们得

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{m_0}{M_1}\varphi_1^2(a)}$$

对于非受约束梁的第一振型，我们有

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}, \qquad \varphi_1(x) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\varphi_1\left(\frac{l}{3}\right)=\sqrt{2}\ \sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{2}\times 0.866$$

$M_1=M=$ 梁的质量

这样，把它们代入上列方程后，得出约束梁单一近似振型之值为

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2=\frac{1}{1+1.5\ \dfrac{m_0}{M}}$$

在例 7.5-5 中，同一问题用邓克列方程处理时，得出这一比值的结果是

$$\frac{1}{1+1.6\ \dfrac{m_0}{M}}$$

例 9.8-2

一导弹被线形和扭转弹簧约束在试验台上，如图9.8-3所示。

试从受约束导弹的主振型建立确定其自由-自由振型之反问题的公式，受约束导弹的主振型用Φ_i和Ω_i标记。

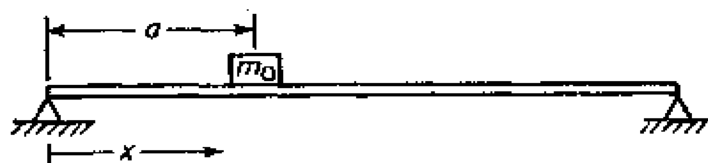


图 9.8-2

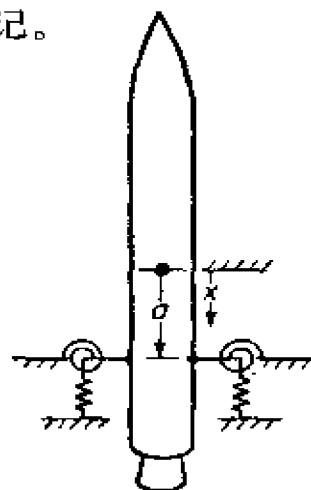


图 9.8-3

解： 这一问题可用求解直接问题时的类似方式进行处理，但我们用Φ_i和Ω_i来代替直接问题中的φ_i和ω_i。现在，我们用引入分别等于$ky(a)$和$Ky'(a)$的力$-F(a)$和$-M(a)$来除去支承处的约束。

为了较详细地展示这一问题，我们从下列方程开始

$$\bar{q}_i = \frac{-F(a)\Phi_i(a) - M(a)\Phi'_i(a)}{M_i\Omega_i^2[1-(\omega/\Omega_i)^2]}$$

上式代替了方程（9.8-8）。令 $D_i(\omega) = M_i\Omega_i^2[1-(\omega/\Omega_i)^2]$，则 $x=a$处的位移为

$$y(a) = \sum_i \Phi_i(a)\bar{q}_i = \sum_i \frac{-F(a)\Phi_i^2(a) - M(a)\Phi'_i(a)\Phi_i(a)}{D_i(\omega)}$$

现在，我们用 $ky(a)$和$Ky'(a)$来代替 $-F(a)$和 $-M(a)$，并写出

$$y(a) = \sum_i \frac{ky(a)\Phi_i^2(a) + Ky'(a)\Phi'_i(a)\Phi_i(a)}{D_i(\omega)}$$

$$y'(a) = \sum_i \frac{ky(a)\Phi'_i(a)\Phi_i(a) + Ky'(a)\Phi_i^2(a)}{D_i(\omega)}$$

这些方程现在可以重新排列成

$$y(a)\left[1 - k\sum_i \frac{\Phi_i^2(a)}{D_i(\omega)}\right] = y'(a)K\sum_i \frac{\Phi'_i(a)\Phi_i(a)}{D_i(\omega)}$$

$$y(a)k\sum_i \frac{\Phi'_i(a)\Phi_i(a)}{D_i(\omega)} = y'(a)\left[1 - K\sum_i \frac{\Phi'^2_i(a)}{D_i(\omega)}\right]$$

于是，频率方程变为

$$\left[1 - k\sum_i \frac{\Phi_i^2(a)}{D_i(\omega)}\right]\left[1 - K\sum_i \frac{\Phi'^2_i(a)}{D_i(\omega)}\right] - kK\left[\sum \frac{\Phi'_i(a)\Phi_i(a)}{D_i(\omega)}\right]^2 = 0$$

在$x=a$处，斜率对挠度之比为

$$\frac{y'(a)}{y(a)} = \frac{1 - k\sum\limits_i \dfrac{\Phi_i^2(a)}{D_i(\omega)}}{K\sum\limits_i \dfrac{\Phi'_i(a)\Phi_i(a)}{D_i(\omega)}}$$

于是，自由-自由振型的形状由下式给出

$$\frac{y(x)}{y(a)} = \sum_i \frac{k\Phi_i(a)\Phi_i(x) + K\dfrac{y'(a)}{y(a)}\Phi'_i(a)\Phi_i(x)}{D_i(\omega)}$$

例 9.8-3

仅应用第一自由-自由振型$\varphi_1(x)$，ω_1，连同位移$\varphi_T=1$，$\Omega_T=0$和转角$\varphi_R=x$，$\Omega_R=0$，求图9.8-3中导弹的约束振型，这里x朝向导弹尾部计量为正。

解：　对三个振型中的每一个，广义质量是

$$M_T=\int dm=M$$

$$M_R=\int x^2dm=I=M\rho^2$$

$$M_1=\int\varphi_1^2(x)\,dm=M$$

式中$\varphi_1(x)$振型已按$M_1=M$＝实际质量加以规一化。

与频率有关的因子D_i为

$$D_T=-M_T\omega^2=-M\omega^2=-M\omega_1^2\lambda$$

$$D_R=-M\rho^2\omega^2=-M\rho^2\omega_1^2\lambda$$

$$D_1=M\omega_1^2\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]=M\omega_1^2(1-\lambda)$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2=\lambda$$

这一问题的频率方程与例 9.8-2 的相同，只是负的k用正的k来代替，以及用$\varphi(x)$和ω代替$\Phi(x)$和Ω。将上列量代入频率方程，我们有

$$\left\{1-\frac{k}{M\omega_1^2}\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{a^2}{\rho^2\lambda}-\frac{\varphi_1^2(a)}{(1-\lambda)}\right]\right\}\left\{1-\frac{K}{M\omega_1^2}\left[\frac{1}{\rho^2\lambda}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\varphi_1'^2(a)}{(1-\lambda)}\right]\right\}-\frac{kK}{M^2\omega_1^4}\left\{\frac{-a}{\rho^2\lambda}+\frac{\varphi'_1(a)\varphi_1(a)}{(1-\lambda)}\right\}^2=0$$

上式可简化为

$$\lambda^2(1-\lambda)+\left(\frac{k}{M\omega_1^2}\right)\left[\varphi_1^2(a)+\frac{K}{k}\varphi_1'^2(a)\right]\lambda^2-\left(\frac{k}{M\omega_1^2}\right)\times$$

$$\times\left[1+\frac{a^2}{\rho^2}+\frac{K}{k\rho^2}\right]\lambda(1-\lambda)+\left(\frac{k}{M\omega_1^2}\right)^2\frac{K}{k\rho^2}\times$$

$$\times(1-\lambda)-\left(\frac{k}{M\omega_1^2}\right)^2\frac{K}{k}\lambda\left\{\varphi_1'^2(a)+\frac{1}{\rho^2}\left[\varphi_1(a)-\right.\right.$$

$$- a\varphi'_1(a) \Big]^2 \Big\} = 0$$

上列方程的一些特殊情况是有趣的，我们来说一说其中之一。假如$K = 0$，频率方程简化为

$$\lambda^2 - \left\{1 + \left(\frac{k}{M\omega_1^2}\right)\left[1 + \frac{a^2}{\rho^2} + \varphi_1^2(a)\right]\right\}\lambda + \left(\frac{k}{M\omega_1^2}\right)\times$$

$$\times\left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) = 0$$

这里$x = a$可以取负值，从而导弹被一个弹簧悬起。

9.9 振型-加速度法

在任一振型合成法中，所遇到的困难之一是不得不检查过程的收敛性。假如收敛性不好，就必须应用很多振型，从而增大了频率行列式的阶数。振型-加速度法通过改善收敛性有助于克服这种困难，从而只需几个主振型。

振型-加速度法从广义坐标q_i的同一微分方程开始，但在次序上加以重新排列。例如，我们可以从方程(9.8-4) 开始，把它按下列次序写成

$$q_i(t) = \frac{F(a,t)\varphi_i(a)}{M_i\omega_i^2} + \frac{M(a,t)\varphi'_i(a)}{M_i\omega_i^2} - \frac{\ddot{q}_i(t)}{\omega_i^2} \quad (9.9\text{-}1)$$

将上式代入方程 (9.8-1) 中，我们得

$$y(x,t) = \sum_i q_i(t)\varphi_i(x)$$

$$= F(a,t)\sum_i \frac{\varphi_i(a)\varphi_i(x)}{M_i\omega_i^2} + M(a,t)\sum_i \times$$

$$\times \frac{\varphi'_i(a)\varphi_i(x)}{M_i\omega_i^2} - \sum_i \frac{\ddot{q}_i(t)\varphi_i(x)}{\omega_i^2} \quad (9.9\text{-}2)$$

这里我们注意，假如$F(a,t)$和$M(a,t)$为静荷载，则包括加速度的最后一项将为零。这样，下列项

$$\sum_i \frac{\varphi_i(a)\varphi_i(x)}{M_i\omega_i^2} = \alpha(a,x)$$
$$\sum_i \frac{\varphi'_i(a)\varphi_i(x)}{M_i\omega_i^2} = \beta(a,x) \tag{9.9-3}$$

应代表影响函数，其中$\alpha(a,x)$和$\beta(a,x)$是在x处依次由a处的单位荷载和单位力矩所引起的挠度。因此，我们可把方程（9.9-2）改写成

$$y(x,t) = F(a,t)\alpha(a,x) + M(a,t)\beta(a,x) -$$
$$-\sum \frac{\ddot{q}_i(t)\varphi_i(x)}{\omega_i^2} \tag{9.9-4}$$

因为在相加项中ω_i^2都是在分母中，因此收敛性比振型–合成法有改进。

在$F(a,t)$和$M(a,t)$为激励力的强迫振动问题中，首先是以常规方式从方程(9.8-4)中解出$q_i(t)$，然后代入方程（9.9-4）中解出挠度。对于受约束结构的主振型，$F(a,t)$和$M(a,t)$仍然是由约束所施加的力和力矩，这时问题可按9.8节中的类似方式进行处理。但是，由于收敛性改善了，将发现只需少数振型就可以。

例9.9-1

应用振型–加速度法，求解图9.8-2中结构上联有一个集中质量m_0的问题。

解：假定是简谐振荡

$$F(a,t) = \bar{F}(a)e^{i\omega t}$$
$$q_i(t) = \bar{q}_i e^{i\omega t}$$
$$y(x,t) = y(x)e^{i\omega t}$$

将这些方程代入方程（9.9-4）中，并令$x=a$，

$$\bar{y}(a) = \bar{F}(a)\alpha(a,a) + \omega^2 \sum_j \frac{\bar{q}_j\varphi_j(a)}{\omega_j^2}$$

因为m_0施加于结构上的力为

$$\bar{F}(a) = m_0\omega^2\bar{y}(a)$$

我们可在上列两个方程中消去$\bar{y}(a)$，得到

$$\frac{\bar{F}(a)}{m_0\omega^2}=\bar{F}(a)\alpha(a,a)+\omega^2\sum_j\frac{\bar{q}_j\varphi_j(a)}{\omega_j^2}$$

或

$$\bar{F}(a)=\frac{\omega^2\sum_j\frac{\bar{q}_j\varphi_j(a)}{\omega_j^2}}{\frac{1}{m_0\omega^2}-\alpha(a,a)}$$

现在，假如我们把这一方程代入方程（9.8-4）中，并假设为简谐运动，则我们可得方程

$$(\omega_i^2-\omega^2)\bar{q}_i=\frac{\bar{F}(a)\varphi_i(a)}{M_i}=\frac{\omega^2\varphi_i(a)\sum_j\bar{q}_j\frac{\varphi_j(a)}{\omega_j^2}}{M_i\left[\frac{1}{m_0\omega^2}-\alpha(a,a)\right]}$$

从新排列后，我们得

$$[1-m_0\omega^2\alpha(a,a)](\omega_i^2-\omega^2)\bar{q}_i=\frac{\omega^4m_0\varphi_i(a)}{M_i}\sum_j\frac{\bar{q}_j\varphi_j(a)}{\omega_j^2}$$

它代表一组$\bar{q}_k$的线性方程，可是，由总和所表示的级数将由于分母中的ω_j^2而很快收敛。这一有利条件是振型数目较少，但不利条件是这些方程中的ω是四次的而不是二次的。

9.10 分量振型综合法

一个大的结构系统的处理可以通过把大系统分成较小子系统的方法来简化，这些子系统通过联接点处的位移条件和力条件与大系统相联系。每一子系统可用振型函数来表示，这些振型函数的总和应能满足联接点处的位移条件和力条件。这些函数并不需要是系统的正交振型或主振型，用到的每一振型也不需满足联接点条件，只要它们的联合总和能满足联接点条件即可。拉格朗日方程，特别是乘余坐标法，构成这种综合过程的基础。

为了说明振型综合法的基本概念，我们来研究一根弯转90°

的简单梁，它是W.赫提[1] 曾应用过的一个例子。图 9.10-1中 所示的梁被设想为仅在图纸平面内振动。

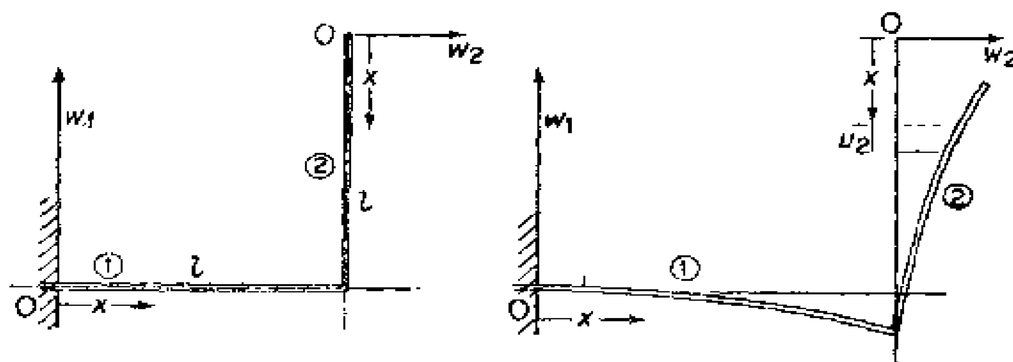


图 9.10-1　附有坐标的梁分段 1 和 2

我们将梁分成两个分段①和②，它们的坐标如图所示 为w_1，x；w_2，x；和u_2，x。对于分段①，我们假设挠度为

$$w_1(x,t)=\phi_1(x)p_1(t)+\phi_2(x)p_2(t)+\cdots$$

$$=\left(\frac{x}{l}\right)^2 p_1+\left(\frac{x}{l}\right)^3 p_2 \qquad (9.10\text{-}1)$$

注意这两个振型函数满足分段①边界处的几何条件和力条件如下

$$w_1(0)=0 \qquad w_1(l)=p_1+p_2$$

$$w'_1(0)=0 \qquad w_1'((l)=\frac{2}{l}p_1+\frac{3}{l}p_3$$

$$(9.10\text{-}2)$$

$$w_1''(0)=\frac{M(0)}{EI}=\frac{2}{l^2}p_1 \quad w''_1(l)=\frac{M(l)}{EI}=\frac{2}{l^2}p_1+\frac{6}{l^2}p_2$$

$$w_1'''(0)=\frac{V(0)}{EI}=-\frac{6}{l^3}p_2 \quad w_1'''(l)=\frac{V(l)}{EI}=\frac{6}{l^3}p_2$$

其次，考虑坐标w_2，x的原点在自由端的分段 ②。下列函数将满足梁分段②的边界条件

$$w_2(x,t)=\phi_3(x)p_3(t)+\phi_4(x)p_4(t)+\phi_5(x)p_5(t)+\cdots$$

$$=1p_3+\left(\frac{x}{l}\right)p_4+\left(\frac{x}{l}\right)^4 p_5 \qquad (9.10\text{-}3)$$

---

[1] Walter C.Hurty, "Vibrations of Structural Systems by Component Synthesis," *Jour.Engr.Mech.Div.Proc.of ASCE*(Aug.1960), pp.51-69.

$$u_2(x,t)=\phi_6(x)p_6(t)+\cdots$$
$$=1p_6 \qquad (9.10\text{-}4)$$

式中$u_2(x,t)$是x方向的位移。

下一步是从下式计算广义质量

$$m_{ij}=\int_0^l m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

对分段①，我们有

$$m_{11}=\int_0^l m\phi_1\phi_1 dx=\int_0^l m\left(\frac{x}{l}\right)^4 dx=0.20ml$$

$$m_{12}=\int_0^l m\phi_1\phi_2 dx=\int_0^l m\left(\frac{x}{l}\right)^5 dx=0.166ml=m_{21}$$

$$m_{22}=\int_0^l m\phi_2\phi_2 dx=\int_0^l m\left(\frac{x}{l}\right)^6 dx=0.1428ml$$

对分段②，广义质量可用ϕ_3到ϕ_6按类似方式算出

$$m_{33}=1.0ml$$
$$m_{34}=0.50ml=m_{43}$$
$$m_{35}=0.20ml=m_{53}$$
$$m_{44}=0.333ml$$
$$m_{45}=0.166ml=m_{54}$$
$$m_{55}=0.111ml$$
$$m_{66}=1.0ml$$

因为在纵向位移u_2和横向位移w_2之间没有耦合关系，$m_{63}=m_{64}=m_{65}=0$。

广义刚度可从下式求出

$$k_{ij}=\int_0^l EI\phi_i''\phi_j''dx$$

这样

$$k_{11}=EI\int_0^l \phi_1''\phi_1''dx=EI\int_0^l\left(\frac{2}{l^2}\right)^2 dx=4\frac{EI}{l^3}$$

$$k_{12}=k_{21}=EI\int_0^l\left(\frac{2}{l^2}\right)\left(\frac{6x}{l^3}\right)dx=6\frac{EI}{l^3}$$

$$k_{22}=12\frac{EI}{l^3}$$

$$k_{55}=28.8\frac{EI}{l^3}$$

所有其它的k_{ij}为零。

对m_{ij}和k_{ij}的计算结果现在可分开来排成质量和刚度矩阵如下。这里，上左部矩阵属于分段①，其余属于分段②。

$$[m]=ml\begin{bmatrix} 0.2000 & 0.1666 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1666 & 0.1428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0.5000 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0.3333 & 0.1666 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2000 & 0.1666 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \tag{9.10-5}$$

$$[k]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 28.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.10-6}$$

在分段①和②的联接处，我们有如下的约束方程

$w_1(l)+u_2(l)=0$　　　或　$p_1+p_2+p_6=0$

$w_2'(l)=0$　　　　　　　$p_3+p_4+p_5=0$

$w_1'(l)-w_2'(l)=0 \qquad\qquad 2p_1+3p_2-p_4-4p_5=0$

$EI[w_1''(l)+w_2''(l)]=0 \qquad\qquad 2p_1+6p_2+12p_5=0$

排成矩阵形式，这些方程是

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = 0 \quad (9.10\text{-}7)$$

因为所用坐标的总数是 6，有四个约束方程，因而系统的广义坐标数为二〔即有相应于四个约束方程的四个多余坐标（参见9.2节）〕。这样，我们可在坐标中任选两个作为广义坐标 q。令 $p_1=q_1$ 和 $p_6=q_6$ 为广义坐标，并用 q_1 和 q_6 来表示 $p_1\cdots\cdots p_6$。这在下面的步骤中被完成。

对方程（9.10-7）进行重新排列，把其中的第 1 列和第 6 列移到左边，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -4 \\ 6 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (9.10\text{-}8)$$

上式可简化表示为

$$[s]\{p_{2-5}\}=[Q]\{q_{1,6}\}$$

两边同乘以 $[s]^{-1}$，得

$$\{p_{2-5}\}=[s]^{-1}[Q]\{q_{1,6}\}$$

补入恒等式 $p_1=q_1$ 和 $p_6=q_6$，并写成

$$\{p_{1-6}\}=[C]\{q_{1,6}\}$$

现在，上列约束方程可通过广义坐标 q_1 和 q_6 表示如下

下一步是从下式计算广义质量

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 4.50 \\ -2.333 & -5.0 \\ 0.333 & 0.50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_6 \end{Bmatrix} = [C]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (9.10\text{-}9)$$

回到系统的拉格朗日方程，它是

$$ml[m]\{\ddot{p}\} + \frac{EI}{l^3}[k]\{p\} = 0 \qquad (9.10\text{-}10)$$

把$\{p\}$用约束方程（9.10-9)中的$\{q\}$代入，得

$$ml[m][C]\{\ddot{q}\} + \frac{EI}{l^3}[k][C]\{q\} = 0$$

两边同乘以转置矩阵$[C]'$，得

$$ml[C]'[m][C]\{\ddot{q}\} + \frac{EI}{l^3}[C]'[k][C]\{q\} = 0 \qquad (9.10\text{-}11)$$

比较一下方程（9.10-10）和（9.10-11)，我们注意到，在（9.10-10）中，质量和刚度矩阵为6×6（参见方程9.10-5和9.10-6），而在方程（9.10-11）中，矩阵$[C]'[m][C]$和$[C]'[k][C]$为2×2。这样，我们已把系统的尺度从一个6×6的问题减为一个2×2的问题。

令$\{\ddot{q}\} = -\omega^2\{q\}$，方程（9.10-11）变为如下形式

$$\left[-\omega^2 ml\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_6 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (9.10\text{-}12)$$

从方程（9.10-5)、(9.10-6）和（9.10-9）中，得矩阵$[a_{ij}]$和$[b_{ij}]$的数值为

$$[a_{ij}] = [C]'[m][C] = \begin{bmatrix} 1.1774 & 2.6614 \\ 2.6614 & 7.3206 \end{bmatrix}$$

$$[b_{ij}] = [C]'[k][C] = \begin{bmatrix} 7.200 & 10.800 \\ 10.800 & 19.200 \end{bmatrix}$$

应用这些数值结果，我们可从特性方程（9.10-12）中求得系统

的两个固有频率如下

$$\omega_1 = 1.172\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = 3.198\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

图 9.10-2 表示相应于上述频率的振型形状。因为方程（9.10-12）能使特征向量的解仅由任意参量来表示，所以 q_6 能由 $q_1 = 1.0$ 解出。于是，坐标 p 可从方程（9.10-9）求出，而振型形状可从方程（9.10-1）、（9.10-3）和（9.10-4）求得。

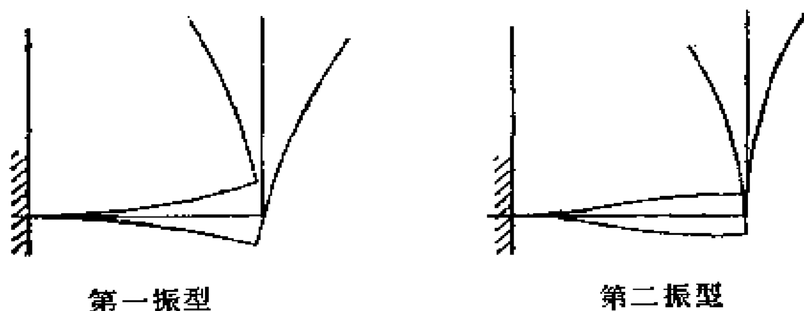


图 9.10-2 第一和第二振型的形状

习　　题

9-1　证明一突加不变力的动载系数达到最大值2.0。

9-2　假如一个突加不变力被施加到一系统上，该系统的第 i 振型的阻率为 $\zeta = c/c_{cr}$，证明动载系数可近似地由下式确定

$$D_i = 1 - e^{-\zeta\omega_i t}\cos\omega_i t$$

9-3　求一个均布力的振型参与系数。

9-4　假如一个集中力作用在 $x = a$ 处，相当于这一力的单位长度荷载可用一个增量函数 $l\delta(x-a)$ 来表示。证明振型参与系数变为 $K_i = \varphi_i(a)$，而挠度可被表示为

$$y(x,t) = \frac{P_0 l_3}{EI}\sum_i \frac{\varphi_i(a)\varphi_i(x)}{(\beta_i l)^4} D_i(t)$$

式中 $\omega_i^2 = (\beta_i l)^4 (EI/Ml^3)$ 和 $(\beta_i l)$ 是主振型方程的特征值。

9-5　设一力偶矩M_0作用在$x=a$处，证明荷载$P_e(x)$是图P.9-5中当$\epsilon\to 0$时两个增量函数的极限情况。并证明这一情况下的振型参与系数是

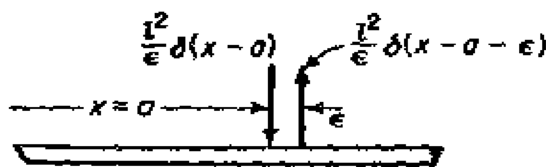


图 P.9-5

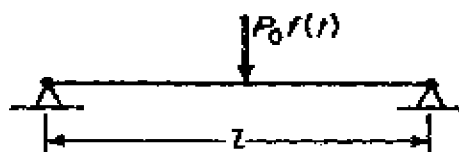


图 P.9-6

$$K_i = l\left.\frac{d\varphi_i(x)}{dx}\right|_{x=a} = (\beta_i l)\varphi_i'(x)_{x=a}$$

9-6　一个集中力$P_0 f(t)$作用于一根简支均匀梁的中点处，如图P.9-6所示。证明挠度由下式给定

$$y(x,t) = \frac{P_0 l^3}{EI}\sum_i \frac{K_i\varphi_i(x)}{(\beta_i l)^4}D_i$$

$$= \frac{2P_0 l^3}{EI}\left\{\frac{\sin\pi\frac{x}{l}}{\pi^4}D_1(t) - \frac{\sin 3\pi\frac{x}{l}}{(3\pi)^4}D_3(t) + \frac{\sin 5\pi\frac{x}{l}}{(5\pi)^4}D_5(t)\cdots\right\}$$

9-7　一力偶矩M_0作用于习题9-6中的简支梁中点处，如图P.9-7所示。证明任一点处的挠度由下式给定

$$y(x,t) = \frac{M_0 l^2}{EI}\sum_i \frac{\varphi_i'(a)\varphi_i(x)}{(\beta_i l)^3}D_i(t)$$

$$= \frac{2M_0 l^2}{EI}\left\{-\frac{\sin 2\pi\frac{x}{l}}{(2\pi)^3}D_2(t) + \frac{\sin 4\pi\frac{x}{l}}{(4\pi)^3}D_4(t) - \frac{\sin 6\pi\frac{x}{l}}{(6\pi)^3}D_6(t)\cdots\right\}$$

9-8　一简支均匀梁突然受到如图P.9-8所示的荷载分布，其中时间变化是一个递增函数。试确定用梁的主振型表示的响应$y(x,t)$。指出哪一种振型是不出现的，并写出前两个出现的振型。

9-9　一根长度为l的细长杆在$x=l$处固定，$x=0$处自由，一个随时间变化

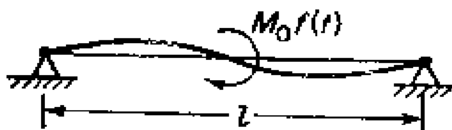


图 P.9-7

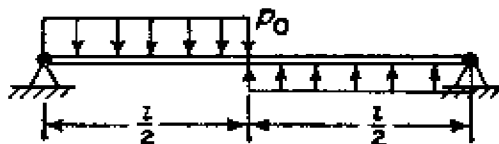


图 P.9-8

的力沿纵向集中作用于杆端$x=0$处。证明所有振型将相同地被激励（即振型参与系数与振型数目无关），完全解是

$$u(x,t)=\frac{2F_0l}{AE}\left\{\frac{\cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}D_1(t)+\frac{\cos\frac{3\pi}{2}\frac{x}{l}}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}D_3(t)+\cdots\right\}$$

9-10 假如习题9-9中的力集中作用于$x=l/3$处，试确定那一种振型在解中不出现。

9-11 在习题9-10中，试确定出现振型的参与系数，并求出作用力的时间变化为任意值时的完全解。

9-12 设想一根质量为M、长度为l的均匀梁支承在总刚度为k的相同弹簧上，如图P.9-12 (a) 所示。假设挠度是

$$y(x,t)=\varphi_1(x)q_1(t)+\varphi_2(x)q_2(t)$$

并选择$\varphi_1=\sin\frac{\pi x}{l}$和$\varphi_2=1.0$。

应用拉格朗日方程，试证明

$$\ddot{q}_1+\frac{4}{\pi}\ddot{q}_2+\omega_{11}^2q_1=0$$

$$\frac{2}{\pi}\ddot{q}_1+\ddot{q}_2+\omega_{22}^2q_2=0$$

式中$\omega_{11}^2=\pi^4(EI/Ml^3)$=梁支持在刚性支承上时，梁的固有频率；$\omega_{22}^2=k/M$=刚性梁支持在弹簧上时，梁的固有频率。

解这些方程并证明

$$\omega^2=\omega_{22}^2\frac{\pi^2}{2}\left\{\frac{(R+1)\pm\sqrt{(R-1)^2+\frac{32}{\pi^2}R}}{\pi^2-8}\right\}$$

令 $y(x,t)=\left(b+\sin\frac{\pi x}{l}\right)q$ 并应用瑞利法去得出

$$\frac{q_2}{q_1}=b=\frac{\pi}{8}\left\{(R-1)\mp\sqrt{(R-1)^2+\frac{32}{\pi^2}R}\right\}$$

$$R=\left(\frac{\omega_{11}}{\omega_{22}}\right)^2$$

系统固有频率的图样示于图 P.9-12(b) 中。

9-13 一根两端固定的均匀梁在跨中受到一个集中力 $P_0f(t)$ 的激励，如图 P.9-13所示。求荷载下的挠度以及在固定端处产生的弯矩。

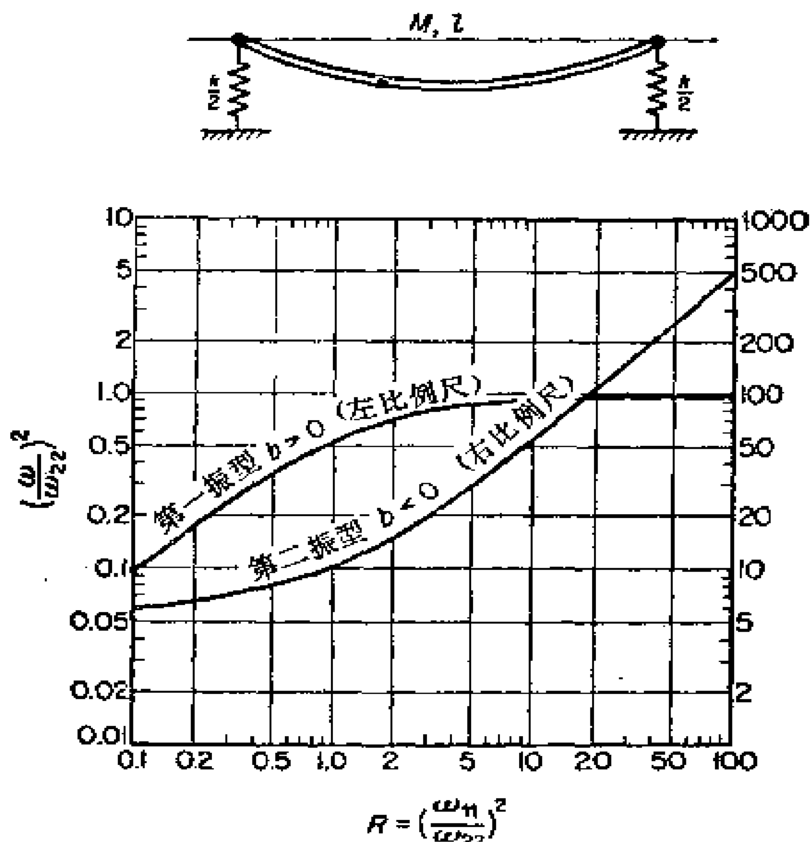


图 P.9-12 图 P.9-12所示系统的前两个固有频率

9-14 假如一个具有任意时间变化的均布荷载作用到一根均匀悬臂梁上，求前三个振型的参与系数。

9-15 一个刚度为 k 的弹簧被联结到一根均匀梁上，如图P.9-15所示。证明单振型近似产生频率方程

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2=1+1.5\left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{Ml^3}{\pi^4EI}\right)$$

式中

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EI}{Ml^3}$$



图 P.9-13



图 P.9-15

9-16 写出习题9-15的两振型近似方程。

9-17 应用振型-加速度法重作习题9-16。

9-18 证明在一个弹簧联结到梁上任意一点$x=a$的问题中，当仅应用一个振型时，约束-振型法和振型-加速度法得出同样的方程，这方程是

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{k}{M\omega_1^2}\varphi_1^2(a)$$

9-19 图P.9-19所示梁的左端上具有一个转动刚度为K磅·英寸/弧度的弹簧。在方程式（9.8-8）中应用两个振型，求作为$K/M\omega_1^2$之函数的梁的基本频率。这里ω_1是简支梁的基本频率。

9-20 假如图P.9-19中梁的两端受到刚度为K之弹簧的约束，求基本频率。当K趋近于无穷大时，其结果将趋近于两端固定梁的频率。

9-21 如图P.9-21所示，一架飞机被理想化为一根长l、单位长度质量m、并在中心处带有集中质量M_0之均匀梁的简单模型。应用M_0的位移作为广义坐标之一，试写出运动方程和确定对称振型的固有频率。对机翼采用第一悬臂振型。



图 P.9-19



图 P.9-21

9-22 对习题9-21的系统，试用机身转动作为广义坐标之一来确定不对称的振型。

9-23 假如在习题9-21中，机翼尖端处质量为M_1的油箱被加到系统中，求新的频率。

9-24 应用受约束振型法，证明在结构的 x_1 点上添加一个转动惯量为 J_1 的质量 m_1 后，其效果是使第一固有频率 ω_1 变化为

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{\sqrt{1+\frac{m_1}{M_1}\varphi_1^2(x_1)+\frac{J_1}{M_1}\varphi_1'^2(x_1)}}$$

而广义质量和阻尼则变化为

$$M'_1 = M_1\left\{1+\frac{m_1\varphi_1^2(x_1)}{M_1}+\frac{J_1}{M_1}\tau_1'^2(\tau)\right\}$$

$$\zeta_1' = \frac{\zeta_1}{\sqrt{1+\frac{m_1}{M_1}\varphi_1^2(x_1)+\frac{J_1}{M_1}\varphi_1'^2(x_1)}}$$

这里，对惯性力应用单一振型近似。

9-25 应用分量振型综合法建立图 P.9-25 所示排架之振动问题的公式。假设各角都保持为90°。

9-26 一根园断面杆在水平平面内弯成直角，如图 P.9-26所示。应用分量振型综合法建立垂直于杆平面的振动方程。注意构件 1 有弯曲和扭转。假定弯曲只发生在垂直平面。

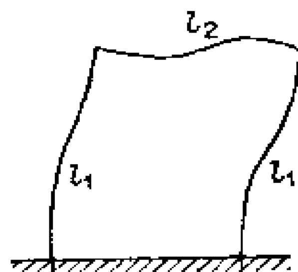


图 P.9-25



图 P.9-26

第十章 随 机 振 动

10.1 导引

在前面几章中，我们论述了动力系统对可用时间数学函数描述的确定激励的响应。对于这类激励所引起的响应也是确定的。

随着喷气发动机和高速飞机的发展，遇到了一种新的振动类型，其激励为一种随机波动，如图 10.1-1 所示。这种随机函数的特征是不能在确定意义中预言其瞬时值。

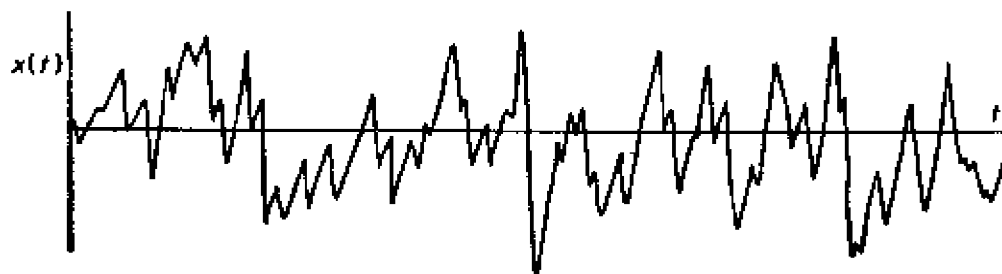


图 10.1-1 随机时间函数的记录

许多随机现象尽管其波动无法预言但却呈现着一定程度的统计规律，这就使得有可能采用统计方法来研究这类问题。例如，在数值 x 到 $x+\Delta x$ 这个特定范围内，预言出现响应瞬时值的概率是可能的。其它量，如均值或均方值可用均分来确定，而问题中变量的频率容量可在傅立叶分析的基础上用各种方法来确定。

在任何统计方法中，必须具有大量数据才能确立统计的可靠性。例如，为了确定某航线因大气湍流造成压力波动的统计量，一飞机可以收集几百张如图 10.1-2 所示的波形记录。每一波形记录称为一个样本（*sample*），样本总体称为样本群（*ensemble*）。我们能够计算在时间 t_1 时瞬时压力的平均值。我们也能将每一样本中在时间 t_1 时的瞬时压力和时间 $t_1+\tau$ 时的瞬时压力相

乘，并对样本群算出该乘积的平均值。当我们选取不同的t_1值时，按上述方法算出的那些平均值如果相同，那末由上述样本群描述的随机过程称为平稳随机过程。

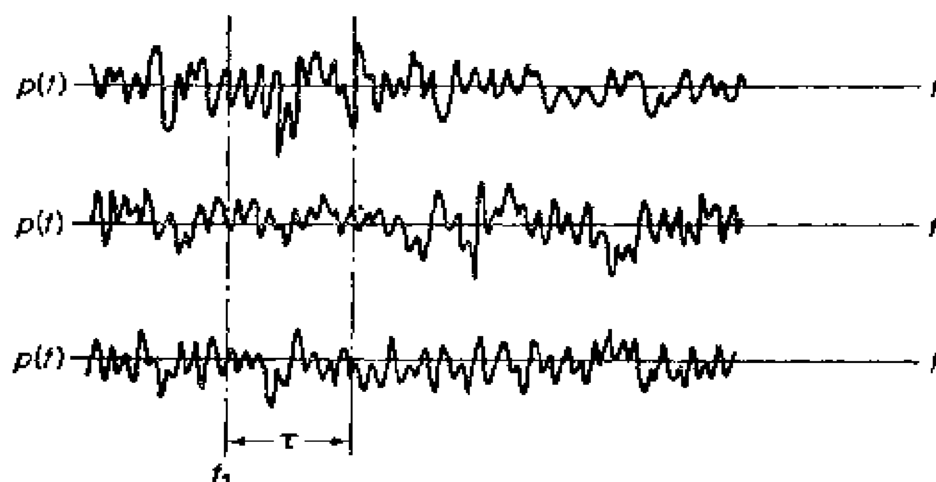


图 10.1-2 随机时间函数的样本群

如果用时间平均值来取代样本群的平均值，对每个样本进行计算的结果若均相同且都等于样本群的平均值，那末这个随机过程称为遍历性随机过程。本章将只论述具有确定的平稳随机过程，可采用时间平均值的这类随机函数。

贯穿本章我们将遇到经过一个长时间区间的时间平均值的概念。下列方程是规定作为时间平均值运算的最通用的记号，在这个方程中$x(t)$是变量。

$$\overline{x(t)} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \qquad (10.1-1)$$

上面的数也等于$x(t)$的期望值$E[x(t)]$，它被定义为经过大量或长时间抽样所得一批数的平均值。对于离散型变量x_i的期望值可由下列方程给出

$$E[x] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (10.1-2)$$

这些平均值运算可以适用于任何变量，如$x^2(t)$或$x(t)\cdot y(t)$，而期望值是和变量的概率分布相联系。

10.2 频率响应函数

在任意线性系统中，输入和输出之间存在着直接线性关系。用图10.2-1所示方框图表示的这种关系对随机函数同样适用。这种以它的传递函数（见方程4.4-4）表征的系统把输入变换为输出。

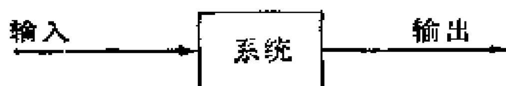


图 10.2-1 线性系统方框图

现在我们来研究由下列微分方程描述的具有粘性阻尼的单自由度弹簧-质量系统

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{10.2-1}$$

我们已在第三章中找到了这个微分方程含有瞬变项的通解，它取决于起始条件并因阻尼而随时间减小，这个微分方程的特解则取决于激励（见方程 3.2-11）。现在我们把频率响应函数定义为：**在稳定状态条件下，当输入等于单位振幅的简谐时间函数时，输出对输入的比值**。在上述考虑中是没有把瞬解考虑在内。

令输入为

$$F(t)=e^{i\omega t} \tag{10.2-2}$$

令稳定状态的输出为

$$x=H(\omega)e^{i\omega t} \tag{10.2-3}$$

将它们代入方程（10.2-1）可得出频率响应函数$H(\omega)$

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\frac{1}{K-m\omega^2+i\omega c}\\&=\frac{1}{K}\,\frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+i2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}\end{aligned} \tag{10.2-4}$$ ❶

注意，$H(\omega)$是一个$\dfrac{\omega}{\omega_n}$和阻尼系数ζ的复合函数，而且它的因次

---

❶ 因次系数（在方程10.2-4中的$1/k$）常常是和力同时考虑，而使该时频率响应函数为一无因次的量

$$H(\omega)=\frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+i2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

是位移与力之比●。方程式（3.2-7）给出了这个量的绝对值，它随频率和阻尼的变化曲线绘在图3.2-3。对于微小阻尼，它的峰值出现在 $\omega/\omega_n \approx 1.0$ 处而共振曲线的锐度用 $Q = \frac{1}{2}\zeta$ 来表示。

均方值 在随机振动中，起始条件和相位 ϕ 很少有意义，因而可以不顾。我们主要关心的是能与 x 的均方值有关联的平均能量。用记号 $\overline{X}^2$ 表示的均方值是将 x^2 在时间区间 T 内积分的平均值，它可按下式求出

$$\overline{X}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2 dt \qquad (10.2\text{-}5)$$

当然，这个方程适用于激励力或响应。例如，如果我们有一个简谐力 $F = F_0 \sin\omega t$，它的均方值是

$$\overline{F}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{F_0^2}{2}(1 - \cos 2\omega t)\, dt = \frac{F_0^2}{2} \qquad (10.2\text{-}6)$$

为了确定均方响应与均方激励之间的关系，我们从响应方程着手

$$x = R_e\{F_0 H(\omega) e^{i\omega t}\} \qquad (10.2\text{-}7)$$

显然我们感兴趣的是上述表达式中的实部。因为任何复数其实部总是等于复数及其共轭复数之和的1/2，以*表示共轭复数，那末我们可将方程(10.2-7)改写为

$$x = \frac{1}{2}F_0(He^{i\omega t} + H^* e^{-i\omega t}) \qquad (10.2\text{-}8)$$

这样将上式平方并代入方程（10.2-5），得 x 的均方值为

$$\begin{aligned}\overline{X}^2 &= \frac{F_0^2}{4}\lim_{T \to \infty}\frac{1}{T}\int_0^T (H^2 e^{i2\omega t} + 2HH^* + H^* e^{-i2\omega t})\,dt \\ &= \frac{F_0^2}{2} H(\omega) H^*(\omega) = \overline{F}^2 |H(\omega)|^2\end{aligned} \qquad (10.2\text{-}9)$$

●在例10.6-3中，频率响应函数也被表为脉冲响应函数的傅立叶变换。

在上式计算中，因为分母$T\to\infty$所以首项和末项均为零，而中项是与T无关的。方程（10.2-9）指出响应的均方值等于激励的均方值乘以系统响应函数绝对值的平方。

10.3　谱的密度

随机振动是由一个广区域内连续分布的多种频率组成。各种频率所表示的能量在随机振动中是一个重要的量。我们研究这个问题，首先考虑一个由许多离散频率组成的周期函数$F(t)$。这个函数可用级数的实部来表示

$$F(t)=R_e\sum_n F_n e^{in\omega_0 t} \tag{10.3-1}$$

式中F_n是一个复数，其中Re表示取级数的实部。我们依照它的共轭复数写出这个方程为

$$F(t)=\frac{1}{2}\left\{\sum_n F_n e^{in\omega_0 t}+\sum_n F_n^* e^{-in\omega_0 t}\right\} \tag{10.3-2}$$

并确定它的均方值为

$$\overline{F}^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{4}\left\{\sum_n F_n e^{in\omega_0 t}+\sum_n F_n^* e^{-in\omega_0 t}\right\}^2 dt$$

$$=\sum_n\frac{F_nF_n^*}{2}=\sum\frac{1}{2}|F_n|^2=\sum_n\overline{F_n^2} \tag{10.3-3}$$

这样多频波的均方值只不过是当前每一个谐波分量的均方值之总和，结果是一个离散的频谱，示于图10.3-1.[1]

然后，我们考察均方在频率区间$\Delta\omega$中的作用。令$S(n\omega_0)$为频率区间$\Delta\omega$中频率为$n\omega_0$时均方值的密度，我们得到

$$S(n\omega_0)\Delta\omega=\frac{F_nF_n^*}{2} \tag{10.3-4}$$

那末，离散的谱密度为

---

[1] 我们已经确定方程（10.3-1）中级数的实部以方程（10.3-2）来表示。n是一个正整数，图10.3-1的谱是对实数频率定义的，而不是对正频率和负频率这两者。

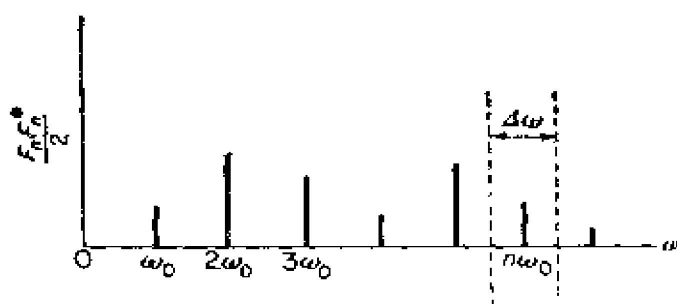


图 10.3-1 周期函数的离散的频谱

$$S(n\omega_0)=\frac{F_nF_n^*}{2\Delta\omega} \tag{10.3-5}$$

显然当$F(t)$含有大量频率分量时，离散的密度函数$S(n\omega_0)$变成更接近于连续谱的密度 函 数$S(\omega)$，图 10.3-2 所 示为这种数函之一。那末，F的均方值是

$$\overline{F}^2=\int_0^\infty S(\omega)d\omega \tag{10.3-6}$$

或

$$\overline{F}^2=\int_0^\infty S(f)df \tag{10.3-6'}$$

如果激励力$F_ne^{in\omega_0t}$作用在具有频率响应函数$H(\omega)$的系统上，从方程（10.2-7）得出它的响应为

$$x=Re\{F_nH(n\omega_0)e^{in\omega_0t}\} \tag{10.3-7}$$

而它的均方响应为

$$\overline{X}^2=\frac{F_nF_n^*}{2}H(n\omega_0)H^*(n\omega_0) \tag{10.3-8}$$

这样，对于一种多频率输入，其均方响应是所有这样 的 值 之 迭加，即

$$\overline{X}^2=\sum_n\frac{F_nF_n^*}{2}H(n\omega_0)H^*(n\omega_0) \tag{10.3-9}$$

$$=\sum S_F(n\omega_0)H(n\omega_0)H^*(n\omega_0)\Delta\omega$$

响应谱密度定义为

$$S_x(n\omega_0)=S_F(n\omega_0)H(n\omega_0)H^*(n\omega_0) \tag{10.3-10}$$

我们发现 $S_x(n\omega_0)$ 也是一种离散谱，它等于用频率响应函数变换的激励谱密度。这样$S_F(n\omega_0)$和$S_x(n\omega_0)$可能出现如图10.3-3所示那样。对于连续谱方程（10.3-9）的总和用一个积分来代替，这样连续谱的均方响应由下式给出

$$\overline{X}^2=\int_0^{\infty}S(\omega)H(\omega)H^*(\omega)d\omega \qquad (10.3\text{-}11)$$

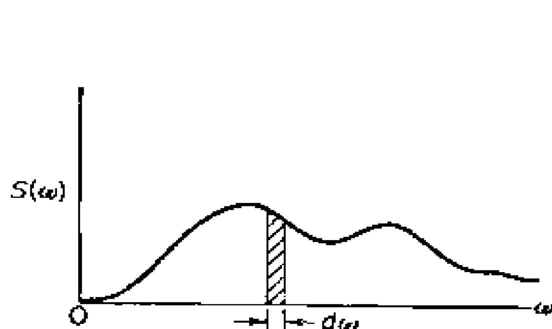


图 10.3-2 连续谱的密度曲线

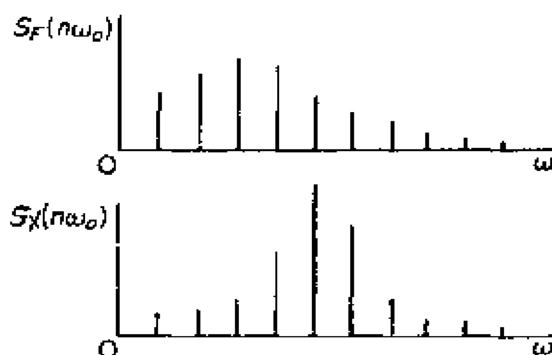


图 10.3-3 激励和响应的谱密度

实际上，谱密度函数常常是通过频率 $f=\omega/2\pi$（赫）给出的，因此上述方程可变换为

$$\overline{X}^2=\int_0^{\infty}S(f)H(f)H^*(f)\,df \qquad (10.3\text{-}12)$$

式中

$$S(f)=2\pi S(\omega)$$

$$H(f)=\frac{\dfrac{1}{k}}{[1-(f/f_n)^2]+i[2\zeta(f/f_n)]}$$

对小阻尼系统，响应函数$H(f)$是在共振点急剧上升达峰值，如果激励的谱密度是宽的，如图10.3-4所示，则均方响应可近似地以下式表示

$$\overline{x^2}\cong f_nS(f_n)\frac{\pi}{4\zeta} \qquad (10.3\text{-}13)$$

图10.3-5和图10.3-6示出了两种普通类型随机记录的典型谱

密度函数。第一种是宽频带噪音记录，它具有宽谱密度函数。第二种是狭频带随机记录，它是宽频带输入尖锐共振系统的典型响应。它的谱密度函数是集中在包络线内的瞬变频率附近。

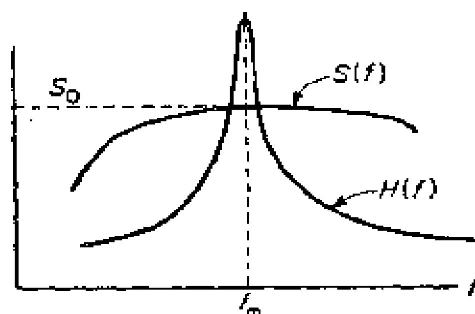


图 10.3-4 用以导出方程式10.3-12的$\bar{x}^2$的$S(f)$和$H(f)$曲线

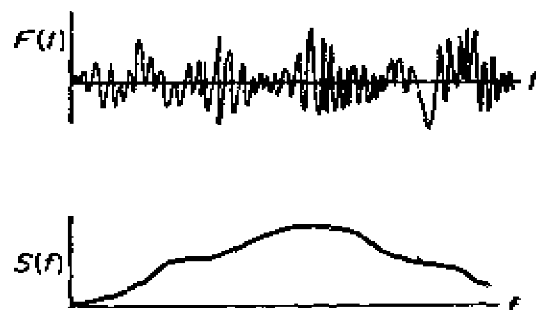
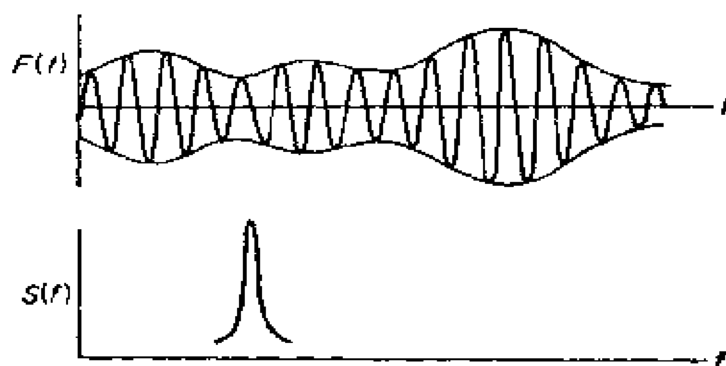


图 10.3-5 宽频带记录及其谱的密度



10.3-6.

图 10.3-6 狭频带记录及其谱的密度

所给记录的谱密度可用图10.3-7的电子回路进行测量。这里谱密度被记作为在频率区间$\Delta\omega$中的均方值分量除以$\Delta\omega$。

$$S(\omega)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{\Delta(\bar{x}^2)}{\Delta\omega} \qquad (10.3-14)$$

通带$B=\Delta\omega$的带通滤波器把$x(t)$在频率区间ω到$\omega+\Delta\omega$中予以变换，然后它的输出被平方、平均再除以$\Delta\omega$。

为了获得高精度的结果，$\Delta\omega$应该定得尽可能细。可是，滤

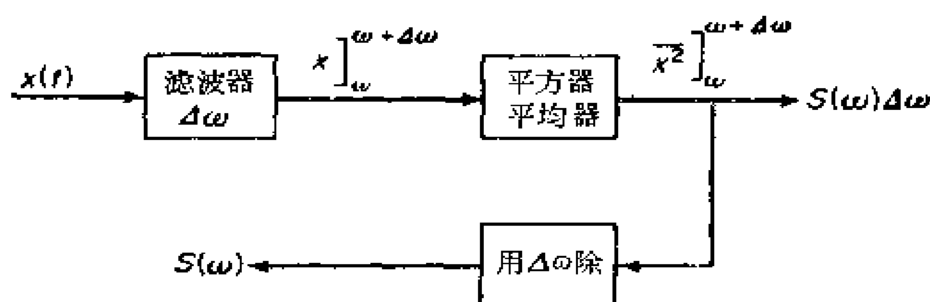


图 10.3-7 功率谱密度分析器

波器的通带不可能无限地减小而不损失测量的可靠性。同样，为了真实的估计均方值要求有充分长的记录，但是实际的记录常常是有限长的。显然，记录长度与频带宽的乘积 $2BT$ 是一个重要参数，这个乘积必须足够大❶。

例 10.3-1

一个单自由度系统，其固有频率为 $\omega_n=\sqrt{k/m}$，阻率为 $\zeta=0.20$，系统由下列力激励

$$F(t)=F\cos\frac{1}{2}\omega_n t+F\cos\omega_n t+F\cos\frac{3}{2}\omega_n t$$

$$=\sum_{m=1/2,1,3/2}F\cos m\omega_n t$$

求均方响应并比较输出谱与输入谱。

解：系统的响应简单地等于单自由度系统对激励力的每一谐波分量的响应之和。

$$x(t)=\sum_{m=1/2,1,3/2}|H(n\omega)|F\cos(m\omega_n t-\phi_m)$$

式中

$$\left|H\left(\frac{1}{2}\omega_n\right)\right|=\frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{9}{16}+(0.20)^2}}=\frac{1.29}{k}$$

❶ 见Bendat, J.S. and A.G Piersol "Random Data" Wiley Interscience, N.Y. (1971) p.96.

$$|H(\omega_n)| = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{4(0.20)^2}} = \frac{2.50}{k}$$

$$\left|H\left(\frac{3}{2}\omega_n\right)\right| = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{25}{16}+9(0.20)^2}} = \frac{0.72}{k}$$

$$\phi_{1/2} = \tan^{-1}\frac{4\zeta}{3} = 0.083\pi$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\infty = 0.50\pi$$

$$\phi_{3/2} = \tan^{-1}\frac{-12\zeta}{5} = -0.142\pi$$

将这些值代入$x(t)$，我们得出如下方程

$$x(t) = \frac{F}{k}[1.29\cos(0.5\omega_n t - 0.083\pi) + $$
$$+ 2.50\cos(\omega_n t - 0.50\pi) + $$
$$+ 0.72\cos(1.5\omega_n t + 0.142\pi)]$$

于是均方响应为

$$\overline{x^2} = \frac{F^2}{2k^2}[(1.29)^2 + (2.50)^2 + (0.72)^2]$$

图 10.3-8 表示本题的输入谱和输出谱。对每种频率其均方输入分量均相同且等于 $F^2/2$。输出谱由系统的频率响应函数来变换。

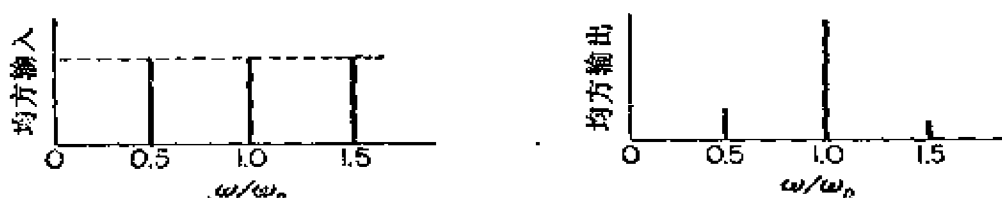


图 10.3-8 具有离散频率的输入谱和输出谱

例 10.3-2

求图10.3-9所示周期函数的傅立叶系数 C_n 和功率谱密度。

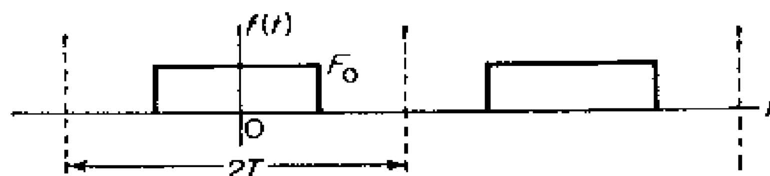


图 10.3-9

解：周期是$2T$且C_n是

$$C_0=\frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}F_0d\xi=\frac{F_0}{2}$$

$$C_n=\frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}F_0e^{-in\omega_0\xi}\ d\xi=\frac{F_0}{2}\left(\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right)$$

C_n的各数值计算如下并绘在图10.3-10中

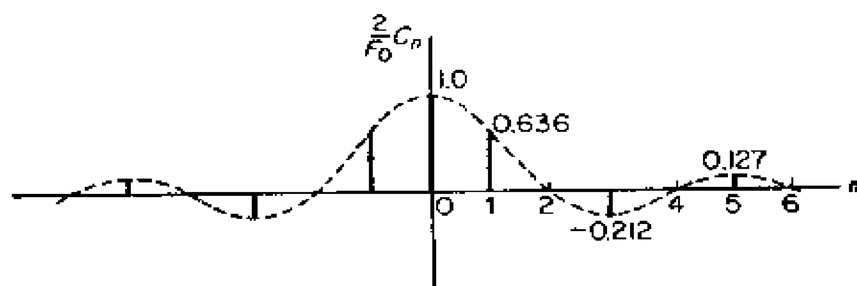


图 10.3-10　傅立叶系数对 n

n	$\frac{n\pi}{2}$	$\sin\frac{n\pi}{2}$	C_n
0	0	0	$\frac{F_0}{2}=1.0\frac{F_0}{2}$
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}\left(\frac{F_0}{2}\right)=0.636\frac{F_0}{2}$
2	π	0	0
3	$3\frac{\pi}{2}$	-1	$\left(-\frac{2}{3\pi}\right)\frac{F_0}{2}=-0.212\frac{F_0}{2}$
4	2π	0	0
5	$5\frac{\pi}{2}$	1	$\left(\frac{2}{5\pi}\right)\frac{F_0}{2}=0.127\frac{F_0}{2}$

均方值由下列方程式确定

$$\overline{f^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{4}\left\{\sum_n (C_n e^{in\omega_0 t} + C_n^* e^{-in\omega_0 t})\right\}^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n C_n^*}{2}$$

因为$\overline{f^2} = \int_0^\infty S_f(\omega)d\omega$，所以谱密度函数可用$\delta$(增量)函数的级数来描述

$$S_f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n C_n^*}{2}\delta(\omega - n\omega_0)$$

10.4 概率分布

参考图 10.4-1 的随机时间函数，小于某特定值x_1的该函数瞬时值的概率是什么？为了回答这个问题，我们在特定值x_1上作一条水平线并把$x(t)$小于x_1的那些时间区间Δt_i相加。这些时间区间的总和除以总时间，这就是$x(t)$小于x_1的总时间分数，这个分数就是$x(t)$小于x_1的概率。

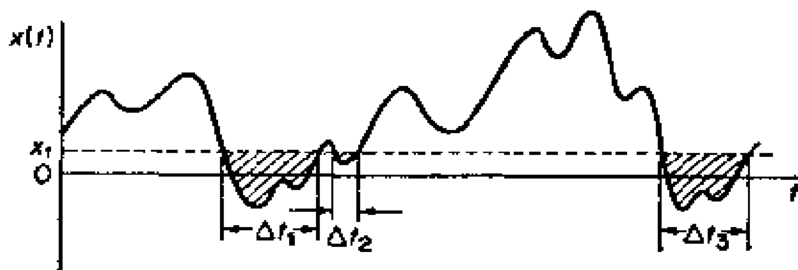


图 10.4-1 累积概率的计算

$$P(x_1) = \text{Prob.}[x(t) < x_1]$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum \Delta t_i \qquad (10.4\text{-}1)$$

如果对x_1选取一个大负数，曲线中将没有一段在负向延伸超过x_1，因而$P(x_1 \to -\infty) = 0$。随着与x_1相应的水平线向上移动，将

有更多的$x(t)$在负向延伸超出x_1，因而$x(t)$延伸到x_1之下时间总和的分数就必定增加，如图10.4-2(a)所示。当$x\to\infty$，所有$x(t)$将位于比$x=\infty$要小的区域内，因此比$x=\infty$要小的$x(t)$的概率是必然的，即$P(x=\infty)=1.0$。这样，向正x方向累积的图10.4-2(a)的曲线一定从$x=-\infty$时的零单调增加到$x=+\infty$时的1.0。该曲线称为累积概率分布函数$P(x)$。

然后，如果我们要求位于值x_1和$x_1+\Delta x$之间的$x(t)$的概率，我们应该做的全部工作是从$P(x_1+\Delta x)$中减去$P(x_1)$，这个差值也是与$x(t)$在区间x_1到$x_1+\Delta x$中所占的时间成正比的。

现在我们定义**概率密度函数**$p(x)$为

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}=\frac{dP(x)}{dx} \quad (10.4\text{-}2)$$

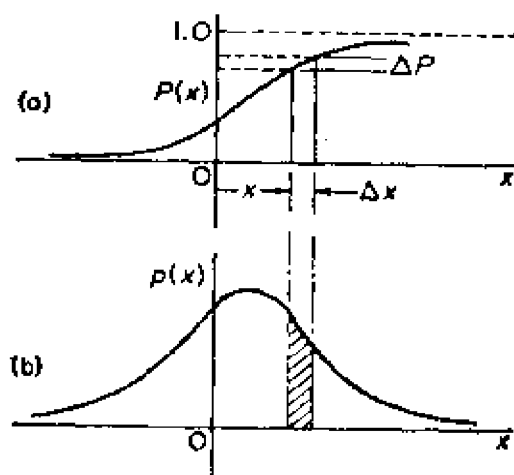


图 10.4-2

(a) 一累积概率；(b) 一概率密度

从图10.4-2(b)中明显地可以看出$p(x)$就是累积概率分布$P(x)$的斜率。从上面的方程我们也可写成

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x_1}p(x)\,dx \quad (10.4\text{-}3)$$

图10.4-2(b)中概率密度曲线下位于二个x值之间的面积表

示变量在这个区间内的概率。因为位于$x=\pm\infty$之间的$x(t)$的概率是必然的，故

$$P(\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=1.0 \qquad (10.4\text{-}4)$$

而且$p(x)$曲线下的总面积必定是一。

图 10.4-3 示出了概率密度函数用电子计算的流程方框图。以$x(t)$为变量，分析器测量累积时间，在该时间内$x(t)$位于规定区间Δx内。将测得的累积时间除以Δx和t就求得概率密度。

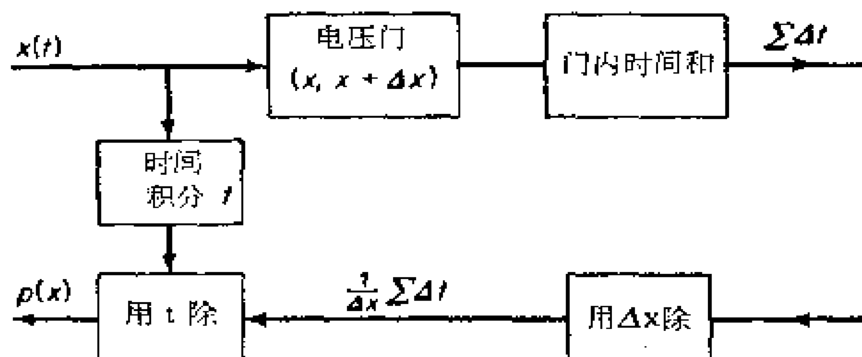


图 10.4-3　$p(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{t\Delta x}\Sigma\Delta t$概率密度分析器

前面依照平均时间定义的均值和均方值是以下列方式与概率密度函数相关。均值$\overline{x}$与概率密度曲线$p(x)$下面积的形心相符，如图10.4-4所示。所以它可以由一次矩求得

$$\overline{x}=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx \qquad (10.4\text{-}5)$$

同样地均方值可以由二次矩求得

$$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\,dx \qquad (10.4\text{-}6)$$

它相当于概率密度曲线下面积对$x=0$的惯性矩。

相对于均值的均方值定义为**方差**σ^2，即

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{x})^2p(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - 2\overline{x}\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\,dx + (\overline{x})^2\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx$$

$$= \overline{x^2} \qquad - 2(\overline{x})^2 \qquad + (\overline{x})^2$$

$$= \overline{x^2} \qquad - (\overline{x})^2 \qquad (10.4\text{-}7)$$

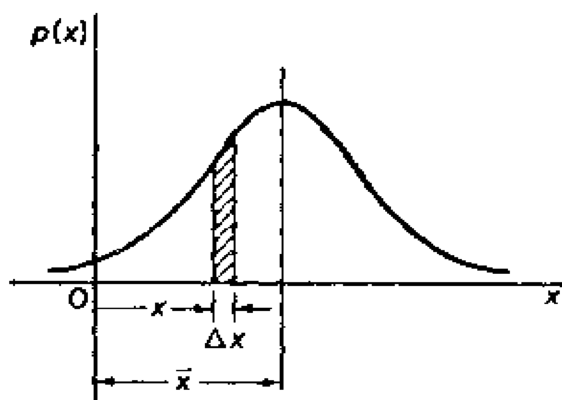


图 10.4-4 $p(x)$的一次矩和二次矩

标准差 σ 是方差的正平方根。当均值为零时， $\sigma=\sqrt{\overline{x^2}}$.即标准差等于均方值的平方根(rms)。

高斯和瑞利分布 (*Gaussian and Rayleigh Distribution*)

高斯（正态）分布和瑞利分布是在自然界中频繁出现的一些分布，这两种分布均可以用数学表示。高斯分布是对称于均值（假定均值为零）的钟状曲线，其方程式如下

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad (10.4\text{-}8)$$

标准差 σ 是相对于均值的概率散度的一种度量。σ 值愈小，$p(x)$ 曲线就愈狭窄（记住：$p(x)$曲线下的总面积 = 1.0），如图 10.4-5(a)所示。

图 10.4-5(b)是以 x/σ 来绘制的无因次的高斯分布。处于 $\pm\lambda\sigma$ 区间内 $x(t)$的概率可由下列方程式求得（此处 λ 是任意正数）

$$\text{Prob}[-\lambda\sigma\leqslant x(t)\leqslant\lambda\sigma]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda\sigma}^{\lambda\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx \qquad (10.4\text{-}9)$$

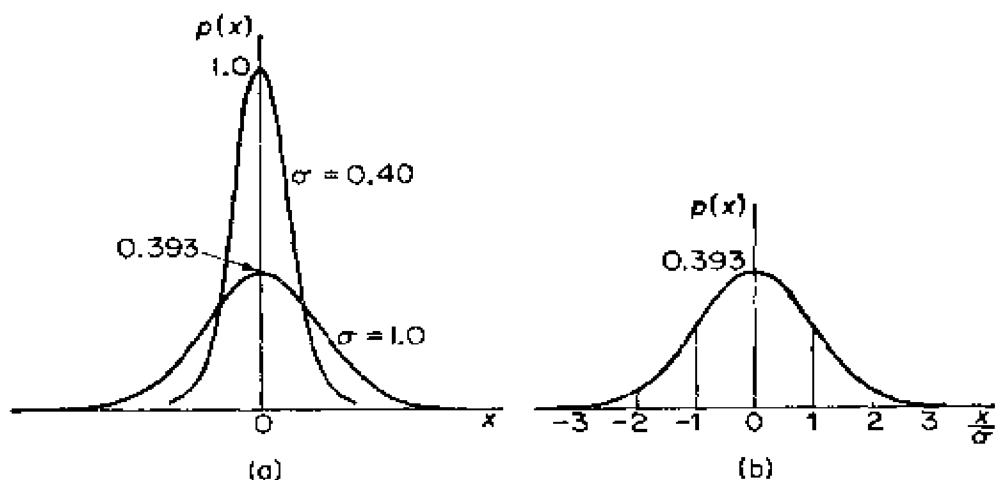


图 10.4-5　正态分布

下表示出了当 $\lambda=1$， 2 和 3 时相应的概率数值。

λ	$\text{prob}[-\lambda\sigma\leqslant x(t)\leqslant\lambda\sigma]$	$\text{prob}[\,|x|>\lambda\sigma]$
1	68.3%	31.7%
2	95.4%	4.6%
3	99.7%	0.3%

位于$\pm\lambda\sigma$处$x(t)$的概率，即$|x|$超过$\lambda\sigma$的概率等于 1.0 减去上面的数值，或由下式确定

$$\text{Prob}\,[\,|x|>\lambda\sigma]=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda\sigma}^{\infty}e^{-x^2/2\sigma^2}dx=erfc\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\quad(10.4\text{-}10)$$

限于正值的随机变量（如振幅的绝对值A）经常趋向于由下式定义的瑞利分布

$$p(A)=\frac{A}{\sigma^2}e^{-A^2/2\sigma^2}\qquad A>0\qquad(10.4\text{-}11)$$

当$A<0$时，概率密度$p(A)$为零，这种分布的形状示于图10.4-6。

瑞利分布的均值和均方值可以从一次矩和二次矩求得如下

$$\overline{A}=\int_0^{\infty}Ap(A)dA=\int_0^{\infty}\frac{A^2}{\sigma^2}e^{-A^2/2\sigma^2}dA=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$(10.4\text{-}12)$$

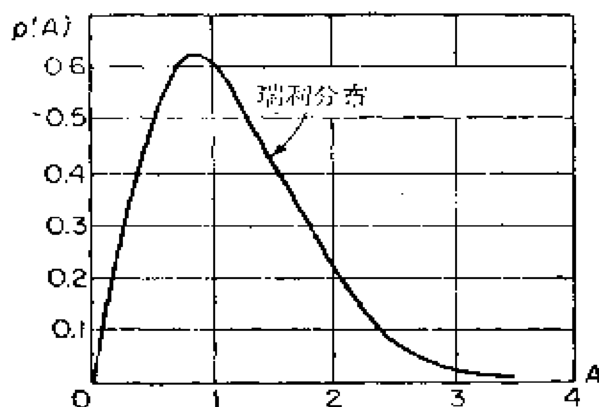


图 10.4-6 瑞利分布

$$\overline{A^2}=\int_0^{\infty} A^2 p(A)dA=\int_0^{\infty}\frac{A^3}{\sigma^2}e^{-A^2/2\sigma^2}dA=2\sigma^2$$

与瑞利分布相关的方差是

$$\sigma_A^2=\overline{A^2}-(\overline{A})^2=\left(\frac{4-\pi}{2}\right)\sigma^2\cong\frac{2}{3}\sigma \qquad (10.4\text{-}13)$$

同样，当A大于规定值$\lambda\sigma$时，A的概率是

$$\text{Prob}[A>\lambda\sigma]=\int_{\lambda\sigma}^{\infty}\frac{A}{\sigma^2}e^{-A^2/2\sigma^2}dA \qquad (10.4\text{-}14)$$

这个概率具有下面的数值

λ	$P(A>\lambda\sigma)$
0	100%
1	60.7%
2	13.5%
3	1.2%

在实际中经常遇到的三种重要的时间记录例子示于图 10.4-7，该三种曲线的均值位置均任意定为零。对于正弦波其累积概率分布容易地表示如下

$$P(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sin^{-1}\frac{x}{A}$$

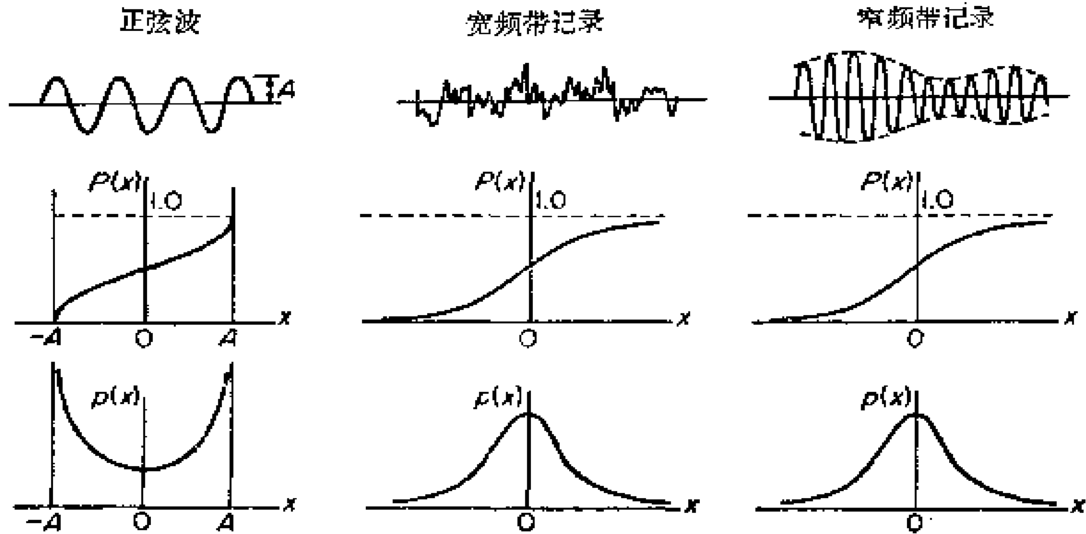


图 10.4-7 三种波形记录的概率函数

对 $P(x)$求导即可得出它的概率密度为

$$P(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}} \qquad |x|<A$$

$$=0 \qquad |x|>A$$

对于宽频带波形记录，其振幅、相位及频率均非常不规律的，因此用一个解析式来表示它的瞬时值是不可能的。这样的函数在无线电噪声、喷气发动机的压力波动、大气湍流等事例中遇到，对于这些波形记录最可能的概率分布是高斯分布。

当一种宽频带记录经过一窄频带滤波器或经过一种它的滤波器的频带宽度比它的中心频率小的谐振系统时，我们得到第三种波，这种类型的波基本上是一种振幅和相位变化缓慢的等频振荡。这种波的瞬时值的概率分布与宽频带随机函数的概率分布相同。可是，相当于波形包络线的各波峰的绝对值将是一种瑞利分布。

另一个很重要的量是峰值的分布。莱斯(Rice)❶指出，峰值的分布取决于量$N_0/2M$，此处N_0是波形曲线通过零线的交点数

❶ 见参考文献 8。

目而 $2M$ 是正峰值与负峰值的数目。对于正弦波或窄频带，N_0 等于 $2M$，因此比值 $N_0/2M=1$。对于宽频带随机记录，峰值的数目将大大超过波形曲线通过零线的交点数目，因此 $N_0/2M$ 趋近零。当 $N_0/2M=0$ 时，峰值的概率密度分布证明是高斯分布。当 $N_0/2M=1$ 时，如在窄频带情况中那样，峰值的概率密度分布趋向于瑞利分布。

例 10.4-1

一个随机振动试验说明书要求：

加速度均值 = 0；

加速度密度为 $0.025g^2$/赫；

频率范围为20至2000赫，

求均方根加速度。

解：均方根加速度就是将加速度密度与频带宽相乘，并对该乘积取平方根。

均方根加速度 $=\sqrt{0.025\times(2000-20)}=\sqrt{49.5}=7.03g$

例 10.4-2

一个随机信号在20至1200赫之间具有常量谱密度

$$S(f)=0.004\text{英寸}^2/\text{赫}$$

而在此频率范围以外，则谱密度为零。这个随机信号的均值是 2.0 时，求它的标准差及其均方根值。

解：如果均值不是零，我们应该用方程式（10.4-7）

$$\overline{x^2}=(\overline{x})^2+\sigma^2$$

标准差从下式求出

$$\sigma^2=\int_0^\infty S(f)df=\int_{20}^{1200}0.004df=4.72$$

而其均方值为

$$\overline{x^2}=2^2+4.72=8.72$$

因而其均方根值为

$$\text{rms}=\sqrt{\overline{x^2}}=\sqrt{8.72}=2.95\text{英寸}$$

图10.4-8所示为这个问题的图解。

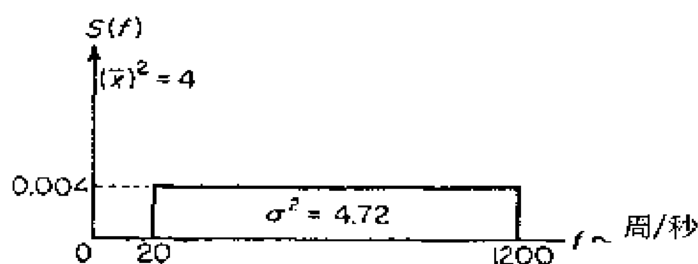


图 10.4-8 以频率为函数的谱密度

例 10.4-3

任何结构对某一点随机激励的响应，只要激励的谱密度以及结构的频率响应曲线为已知，就可以用简单的数字程序来计算。例如，研究图10.4-9(*a*)所示的结构，它的基础承受一具有图10.4-9(*b*)所示功率谱密度函数的随机加速度输入。要求计算p点的响应并确定超过任一规定加速度的概率。

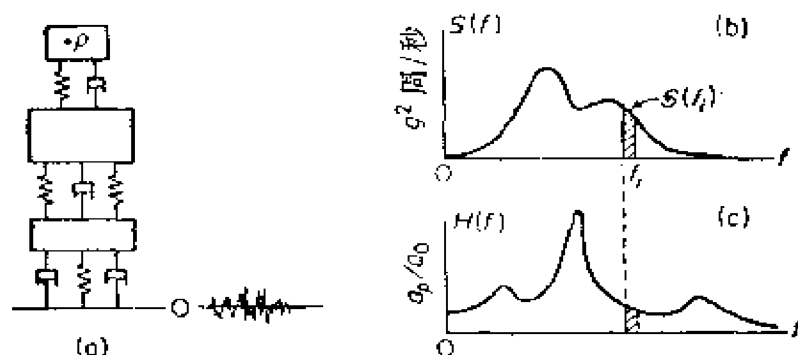


图 10.4-9

p 点的频率响应函数$H(f)$可以通过试验来求得，即对基础施加一个具有等加速度a_0输入的、可改变频率的正弦曲线激振器，测量在p点的加速度响应，将测得的p点的加速度除以a_0，即可得出如图10.4-9(*c*)所示的$H(f)$曲线。

p 点的均方响应$\overline{a_p^2}$由下列方程用数值计算

$$\overline{a_p^2}=\sum_i S(f_i)\,|H(f_i)|^2\Delta f_i$$

下面的数值表说明了这个计算过程。

数 值 的 例 子

f 赫	Δf 赫	$S(f_i)$ g^2/赫	$\lvert H(f_i)\rvert$ 无因次	$\lvert H(f_i)\rvert^2\Delta f$ 赫	$S(f_i)\lvert H(f_i)\rvert^2\Delta f$ g^2单位
0	10	0	1.0	10	0
10	10	0	1.0	10	0
20	10	0.2	1.1	12.1	2.4
30	10	0.6	1.4	19.6	11.8
40	10	1.2	2.0	40	48.0
50	10	1.8	1.3	16.9	30.5
60	10	1.8	1.3	16.9	30.5
70	10	1.1	2.0	40	44.0
80	10	0.9	3.7	137	123
90	10	1.1	5.4	291	320
100	10	1.2	2.2	48.4	57.7
110	10	1.1	1.3	16.9	18.6
120	10	0.8	0.8	6.4	5.1
130	10	0.6	0.6	3.6	2.2
140	10	0.3	0.5	2.5	0.8
150	10	0.2	0.6	3.6	0.7
160	10	0.2	0.7	4.9	0.1
170	10	0.1	1.3	16.9	1.7
180	10	0.1	1.1	12.1	1.2
190	10	0.5	0.7	4.9	2.3
200	10	0	0.5	2.5	0
210	10	0	0.4	1.6	0

$$\overline{a^2}=700.6g^2$$

$$\sigma=\sqrt{700.6g^2}=26.6g$$

超过规定加速度的概率是

$$p[\,|a|>26.6g\,]=31.7\%$$

$$p[\,a_{峰值}>26.6g\,]=60.7\%$$

$$p[\,|a|>79.8g\,]=0.3\%$$

$$p[\,a_{峰值}>79.8g\,]=1.2\%$$

10.5 相关

相关是两个量之间相似性的一种度量。假设我们有两个记录$x_1(t)$和$x_2(t)$，示于图10.5-1。

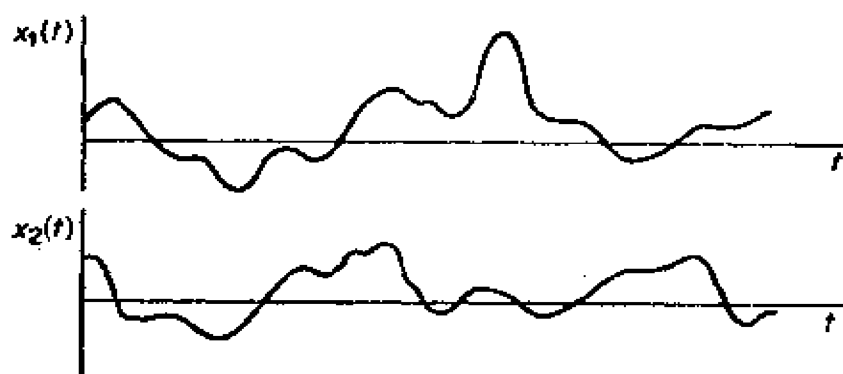


图 10.5-1 $x_1(t)$与$x_2(t)$之间的相关

它们之间的相关是这样计算的：先对每一时间 t 时两个记录的纵坐标相乘，再将乘积的总和除以这些乘积的数目以求得平均值 $\langle x_1(t)x_2(t)\rangle$。显然，当两个记录相类似或完全相同时，所求得的相关将是最大。对于不相同的记录，某些乘积是正值而另一些乘积则是负值，所以这些乘积的总和将较小。

下面考虑 $x_2(t)$和 $x_1(t)$完全相同但向左移过时间 τ 的情况，如图10.5-2所示。那末在时间 t 时，当 x_1 是 $x(t)$时，x_2值是$x(t+\tau)$，该时相关将由 $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle$ 给出。这里如$\tau=0$，我们获得完全相关，当 τ 增加则相关将减小。

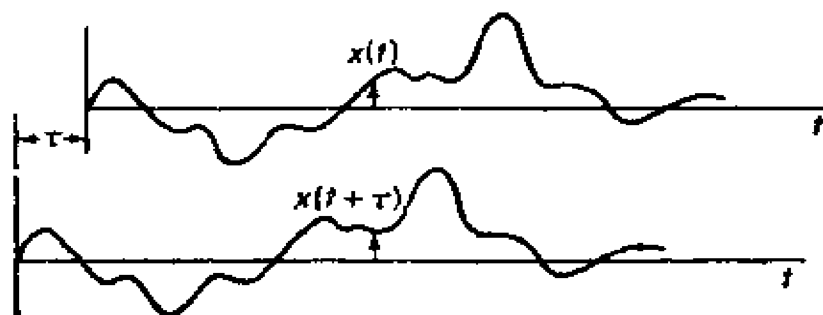


图 10.5-2 $x(t)$函数移过 τ

显然，上面的结果可以从一个记录上取时间 t 时的纵坐标与时间 $t+\tau$ 时的纵坐标相乘并确定其平均值而算得。我们把这个结果叫做**自相关**并以 $R(\tau)$ 表示它。自相关 $R(\tau)$ 亦就是乘积 $x(t)x(t+\tau)$ 的期望值，即

$$R(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]=\langle x(t)x(t+\tau)\rangle$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)\,dt \qquad (10.5\text{-}1)$$

当 $\tau=0$ 时，上式定义就简化为均方值

$$R(0)=\overline{x^2}=\sigma^2 \qquad (10.5\text{-}2)$$

因为图 10.5-2 中的第二条记录可看作是相对于第一条记录而迟后，或说第一条记录是相对于第二条记录而超前。显然，$R(\tau)=R(-\tau)$ 是对称于原点 $\tau=0$ 的且总比 $R(0)$ 要小。

对于在图10.5-3中所示的那种高随机函数，在一极短时间移动内很快就失去了它的相似性。所以它的自相关在 $\tau=0$ 处是尖峰值，然后随 $\pm\tau$ 的增大而迅速下降如图所示。

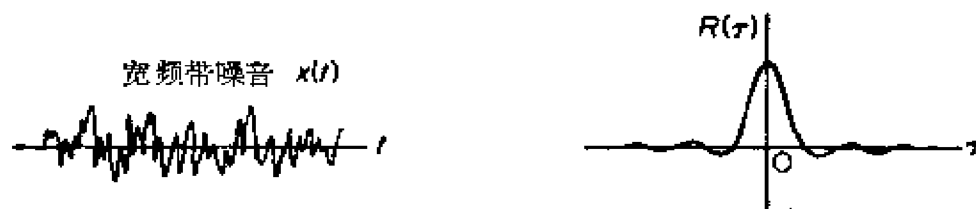


图 10.5-3　高随机函数及其自相关

对于周期波这种特种情况，自相关一定是周期性的，且具有相同的周期，因为波移过一个周期，使波形又相一致。图10.5-4所示为一正弦波及其自相关。

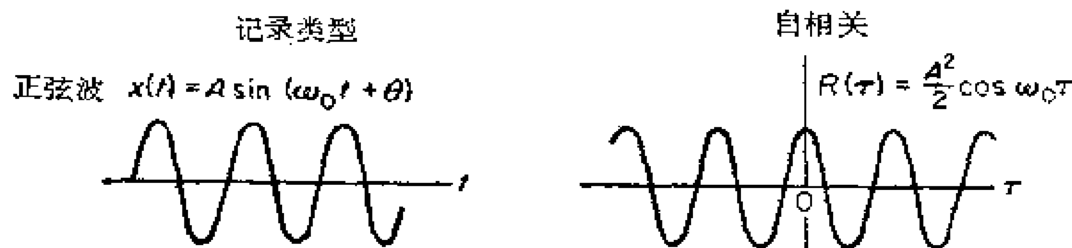


图 10.5-4　正弦波及其自相关

宽频带噪声的自相关是在 $\tau=0$ 处为一峰值的曲线，在峰值的任一边该曲线均很快趋近于零。这说明了宽频带随机记录除了接近 $\tau=0$ 外，自相关是小的或没有。

对于图10.5-5所示窄频带记录，其自相关具有在正弦波中已找到的若干特性，这种自相关曲线又是一种偶函数，它在 $\tau=0$ 处具有最大值，它的频率 ω_0 与主频率相一致。实际上的差别在于，对于窄频带记录在大的 τ 值时 $R(\tau)$ 接近于零。显然，在一个随机记录中所隐藏的周期性可以由大 τ 值的 $R(\tau)$ 来发现。

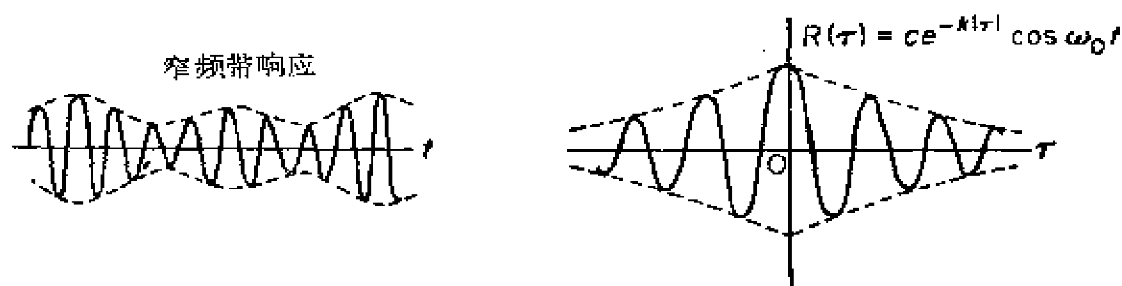


图 10.5-5　三型记录的自相关

自相关函数的进一步特性将在以后章节中加以讨论。现在我们在图10.5-6中示出一个方框图，它表示求自相关的基本运算。信息 $x(t)$ 被时延 τ 并与之相乘，然后它被积分和被平均。时延 τ 是在各次运算时被固定并依靠慢速扫描技术可使 τ 作间断改变或连续改变。

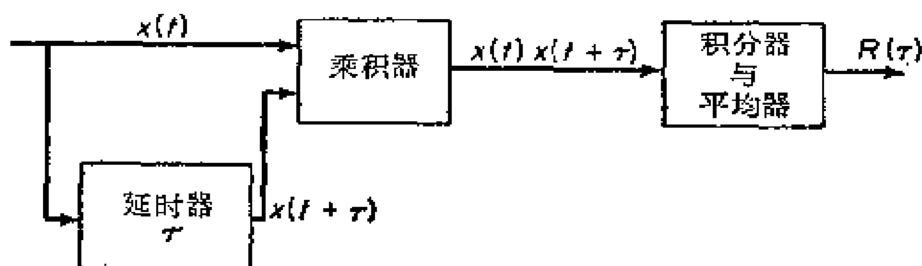


图 10.5-6　自相关分析器方框图

互相关　考虑两个随机量 $x(t)$ 和 $y(t)$。这两个量间的相关由下式定义：

$$R_{xy}(\tau)=E[x(t)y(t+\tau)]=\langle x(t)y(t+\tau)\rangle$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(t+\tau)dt \qquad (10.5\text{-}3)$$

上式也可称为 x 量和 y 量之间的互相关。

在动力问题中这样的量经常出现。例如，令 $x(t)$ 为梁端因在梁上某规定点作用一个载荷 $F_1(t)$ 所引起的挠度。$y(t)$ 是由梁上不同点作用另一个载荷 $F_2(t)$ 时梁端的挠度，如图10.5-7 所示。那末由两个载荷同时作用的挠度为 $z(t)=x(t)+y(t)$，而两个载荷形成的 $z(t)$ 的自相关为

$$\begin{aligned}R_z(\tau)&=\langle z(t)z(t+\tau)\rangle\\&=\langle[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\rangle\\&=\langle x(t)x(t+\tau)\rangle+\langle x(t)y(t+\tau)\rangle+\\&\quad+\langle y(t)x(t+\tau)\rangle+\langle y(t)y(t+\tau)\rangle\\&=R_x(\tau)+R_{xy}(\tau)+R_{yx}(\tau)+R_x(\tau)\end{aligned} \qquad (10.5\text{-}4)$$

因此，由独立载荷 $F_1(t)$ 与 $F_2(t)$ 的联合作用在给定点挠度的自相关不能简单地用每一个独立载荷作用下而得出的自相关 $R_x(\tau)$ 和 $R_y(\tau)$ 相加来确定。此处 $R_{xy}(\tau)$ 和 $R_{yx}(\tau)$ 称之为互相关，而且通常它们是不相同的。

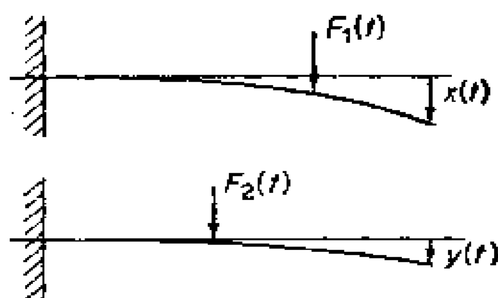


图 10.5-7

10.6 傅立叶变换

在第10.3节中我们考察了周期时间函数的频率容量，它导致离散的频谱。那时谱密度的概念曾作为在频率区间中的均方分量

除以频率区间值来引入的，当周期很长时这个量接近于连续变量。当谱密度函数已知时，确定均方值的任务简化为按方程式（10.3-6）对所有频率求和。

通常，随机振动是非周期的，而且频率分析要求采用傅立叶积分。不过傅立叶积分可以看成是当周期延伸至无穷大时傅立叶级数的一种极限状况。从傅立叶积分中产生的傅立叶变换使随机振动问题能够获得更广泛的处理。

我们以一个周期函数 $x(t)$ 开始，它是一个由下列方程表示的实型量

$$x(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(C_n e^{in\omega_0 t}+C_n^* e^{-in\omega_0 t}) \qquad (10.6\text{-}1)$$

式中系数C_n由下列方程给出

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(\xi)e^{-in\omega_0\xi}d\xi \qquad (10.6\text{-}2)$$

T是周期。方程（10.6-2）指出$C_n^*=C_{-n}$，因此方程（10.6-1）可以改写为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{in\omega_0 t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(\xi)e^{-in\omega_0\xi}e^{in\omega_0 t}d\xi \qquad (10.6\text{-}3)$$

这里频率$\omega=n\omega_0$是指定在离散的区间中，因此频率增量为

$$\Delta\omega=(n+1)\omega_0-n\omega_0=\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

从此式中我们用 $\Delta\omega/2\pi$ 代替 $1/T$ 并注意到 $T\to\infty$，$\Delta\omega\to d\omega$ 及 $n\omega_0\to\omega$。因而在极限情况下方程（10.6-3）变为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\right\}e^{i\omega t}d\omega \qquad (10.6\text{-}4)$$

这就是傅立叶积分。

因为在中间大括号内的量只是$i\omega$的函数，我们可以把上式改写为二部分

$$X(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi \qquad (10.6\text{-}5)$$

和

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (10.6\text{-}6)$$

量$X(i\omega)$是$x(t)$的傅立叶变换，上面两个方程是属于傅立叶变换对。方程（10.6-5）将函数$x(t)$分解成谐波分量$X(i\omega)$，而方程（10.6-6）则是将这些谐波分量合成为原始函数$x(t)$。

在实际测量中，用频率f比用圆频率ω更方便。数学上的这样处理还具有简化傅立叶对成下面对称形式的优点。

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\xi)e^{-i2\pi f\xi}d\xi \qquad (10.6\text{-}7)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}df \qquad (10.6\text{-}8)$$

今后只要有可能我们将采用傅立叶变换的这种对称形式。

帕塞伐定理（*Parseval's Theorem*） 帕塞伐定理是一种将时间积分变换为频率积分的有用工具。若$X_1(f)$和$X_2(f)$分别是实数时间函数$x_1(t)$和$x_2(t)$的傅立叶变换，帕塞伐定理陈述如下

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t)\,dt&=\int_{-\infty}^{\infty}X_1(f)X_2(-f)df\\&=\int_{-\infty}^{\infty}X_1(-f)X_2(f)df\end{aligned} \qquad (10.6\text{-}9)$$

这种关系可以用傅立叶变换来加以证明如下

$$x_1(t)x_2(t)=x_2(t)\int_{-\infty}^{\infty}X_1(f)e^{i2\pi ft}df$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)\,x_2(t)dt&=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)\int_{-\infty}^{\infty}X_1(f)e^{i2\pi ft}df\,dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}X_1(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)\,e^{i2\pi ft}dt\right]df\\&=\int_{-\infty}^{\infty}X_1(f)X_2(-f)df\end{aligned}$$

前面有关均方值、自相关以及互相关的所有公式现在都可以应用

帕塞伐定理依照傅立叶变换来表示。

例 10.6-1

用傅立叶变换表示均方值。

令 $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$，并在T区间内平均，T认为趋向于∞，我们得

$$\bar{x}^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X(f)X^*(f)df$$

将此式与方程式（10.3-6'）相比较，我们得到求谱密度函数的关系式

$$S(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X(f)X^*(f) \qquad (10.6-10)$$

例 10.6-2

用傅立叶变换表示自相关。

我们以 $x(t+\tau)$ 的傅立叶变换开始

$$x(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{i2\pi f(t+\tau)}df$$

将此式代入求自相关的表达式，我们得

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x(t+\tau)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}e^{i2\pi f\tau}df\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{i2\pi ft}dt\right\}X(f)e^{i2\pi f\tau}df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X^*(f)X(f)\right\}e^{i2\pi f\tau}df$$

将方程（10.6-10）代入，上式变为

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{i2\pi f\tau}df \qquad (10.6-11)$$

上述方程求逆同样也可以从傅立叶变换求得

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \qquad (10.6\text{-}12)$$

因为 $R(\tau)$ 是对于 $\tau=0$ 对称的，所以上式也可以写成

$$S(f)=2\int_{0}^{\infty}R(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau \qquad (10.6\text{-}13)$$

这就是维纳-凯兴（*Wiener-Kinchin*）方程，他们阐明谱密度函数可以从自相关函数求得。

与维纳-凯兴方程类似，我们能够定义两个量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的互相关为

$$R_{xy}(\tau)=\langle x(t)y(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)y(t+\tau)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X^*(f)Y(f)e^{i2\pi f\tau}df \qquad (10.6\text{-}14)$$

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xy}(f)e^{i2\pi f\tau}df$$

式中的互谱密度定义为

$$S_{xy}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X^*(f)Y(f) \qquad -\infty\leqslant f\leqslant\infty$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X(f)Y^*(f) \qquad (10.6\text{-}15)$$

$$=S_{xy}^*(f)=S_{xy}(-f)$$

从傅立叶变换，上式的逆变换是

$$S_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \qquad (10.6\text{-}16)$$

该方程式是与方程式（10.6-12）相类似的。与自相关不同，互相关和互谱密度函数通常不是偶函数，因此极限 $-\infty$ 至 $+\infty$ 应予保留。

例 10.6-3

证明频率响应函数 $H(\omega)$ 是脉冲响应函数 $g(t)$ 的傅立叶变换。

解：从卷积积分方程（4.3-1），依照脉冲响应函数的响应方程为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\zeta)g(t-\zeta)d\zeta$$

此处因考虑所有经历过的激励低限已延伸到$-\infty$。令$\tau=(t-\zeta)$，上面的积分变为

$$x(t)=\int_{0}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

对于谐激励$f(t)=e^{i\omega t}$，上述方程变为

$$x(t)=\int_{0}^{\infty}e^{i\omega(t-\tau)}g(\tau)d\tau$$

$$=e^{i\omega t}\int_{0}^{\infty}g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

将这个结果与方程（10.2-3）相比较，看出频率响应函数是

$$H(\omega)=\int_{0}^{\infty}g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (10.6\text{-}17)$$

从自相关的拉普拉斯变换求谱密度 到目前为止，我们已经应用了傅立叶变换是假定对所研究问题的记录的傅立叶变换存在。对于傅立叶变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

积分是沿着实数轴从$-\infty$到$+\infty$进行。

我们假定将积分路线改变到一条比实数轴低r且平行于实数轴的直线上，如图10.6-1 a 所示。那末积分限是$\omega=-\infty-ir$到$\omega=+\infty-ir$，此时傅立叶积分延伸到包含这样的函数、对于这种函数前面的方程可能是无效的。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty-ir}^{+\infty-ir}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

如果现在我们引入$s=i\omega$，显然在图10.6-1(a)上的点转过

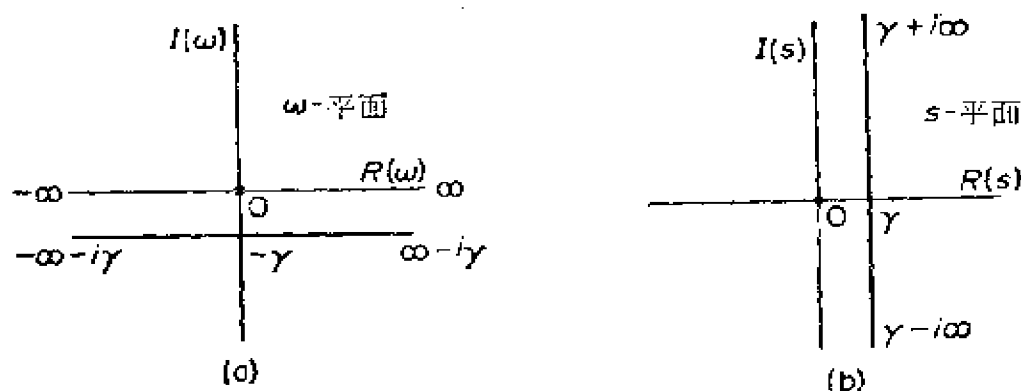


图 10.6-1

90° 如图 10.6-1（b）所示，该时的积分路线变成一条位于坐标原点右面距离为 γ 的垂直线。现在傅立叶变换变为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(s)e^{st}ds$$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

这样就变换成为**双边拉普拉斯变换**对。

下面研究功率谱密度函数的方程（10.6-12）

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

以 $i2\pi f=i\omega=s$，就可看出上述方程是双边拉普拉斯变换

$$S(s)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-s\tau}d\tau \qquad (10.6\text{-}18)$$

因为 $R(\tau)$ 是对称函数，所以积分下限可改为 0 而将积分值加倍。

$$S(s)=2\int_{0}^{\infty}R(\tau)e^{-s\tau}d\tau \qquad (10.6\text{-}19)$$

这样谱密度函数可以从自相关函数的拉普拉斯变换得到。对于没有傅立叶变换的自相关函数，上式提供了计算谱密度函数 $S(i2\pi f)$ 的一种可能的方法。

10.7 连续结构对随机激励的响应

这里我们来研究确定连续弹性结构受分布随机力 $f(x,t)$ 激励的均方响应$\overline{y^2(x,\ t)}$问题。我们用主振型求和方法来探讨这个问题

$$y(x,t)=\sum_j \phi_j(x)q_j(t) \qquad (10.7\text{-}1)$$

式中$\phi_j(x)$是结构的主振型，我们可以应用前面第10.2节中讨论过的有关单自由度系统响应的知识。对此我们必须假设由下式规定的正比阻尼

$$\int_0^l c(x)\phi_j(x)\phi_k(x)dx=0 \qquad \text{对于 } j\neq k$$

这导致下列形式的无偶合主振型方程

$$\ddot{q}_j+2\zeta_j\omega_j\dot{q}_j+\omega_j^2q_j=\frac{1}{M_j}F_j(t) \qquad (10.7\text{-}2)$$

式中

$$M_j=\int_0^l\phi_j^2(x)dm=\text{广义质量}$$

$$F_j(t)=\int_0^l f(x,t)\phi_j(x)dx=\text{广义力}$$

在构成$y(x,\ t)$的均方响应中，下列求和是必须加以考虑的。

$$\overline{y^2(x,\ t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}y^2(x,\ t)dt$$

$$=\sum_j\sum_k\phi_j(x)\phi_k(x)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}q_j(t)q_k(t)dt$$

我们这里注意到我们关注的是$q_j(t)$和$q_k(t)$ 的互相关，该互相关应用帕塞伐定理可以用傅立叶变换的频率积分来代替

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}q_j(t)q_k(t)\ dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}Q_j(f)Q_k^*(f)df$$

式中后面的大写字母表示相应量的傅立叶变换。从方程（10.6-15）我们进一步注意到 $S_{q_jq_k}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} Q_j(f) Q_k^*(f)$ 是广义坐标的互谱密度，它和激励力的互谱密度 $S_{F_jF_k}(f)$ 相关（见方程10.3-10）

$$S_{q_jq_k}(f) = H_j(f) H_k^*(f) S_{F_jF_k}(f)$$

一起代入这些量，均方响应的方程变为

$$\overline{y^2(x, t)} = \sum_j \sum_k \phi_j(x)\phi_k(x)\int_{-\infty}^{\infty} S_{F_jF_k}(f) H_j(f) H_k^*(f)\, df \tag{10.7-3}$$

在时间域内严密地运算是经常必要的，此处运动微分方程的形式为

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}) = F(t) \tag{10.7-4}$$

这里 $F(t)$ 假设为一随机时间函数而 $L(x, \dot{x}, \ddot{x})$ 为一微分方程，它可能是非线性的。这样方程的解最好在数字计算机或模拟计算机上求得，其结果为一随机响应 $x(t)$。

若要求上述问题的响应谱，第一步要形成自相关函数

$$R(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle$$

然后从维纳-凯兴关系式（10.6-13）中求得响应谱 $S(f)$。

例 10.7-1

海浪高度的分布通常是一种瑞利分布，其频谱如大家熟知的布勒兹纳特（Bretschneider[1]）海谱。对一给定的海况，图10.7-1可以代表这种谱。

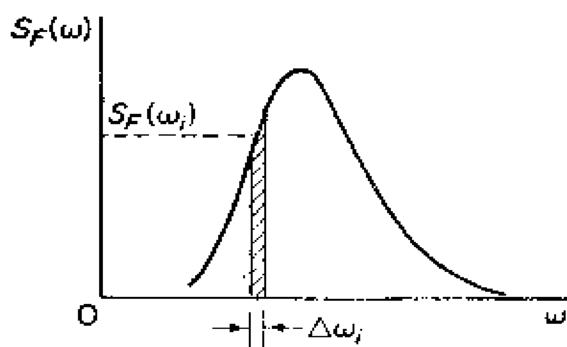


图 10.7-1　海浪的典型谱

[1] C.L.Bretschneider, "Wave Variability and Wave Spectra for Wind-Generated Gravity Waves." T.M.No.118 Beach Erosion Board, U.S.Army Corps of Engineers.

在确定一海洋结构对这种激励的响应中，一个方法是假设下列形式的谐波力

$$F(t)=C\sum_i a_i\cos(\omega_i t+\phi_i) \qquad (10.7\text{-}5)$$

这里与波谱相应，对每一频率 ω_i 振幅 a_i 是按下列关系式选取的

$$\frac{1}{2}a_i^2=S_F(\omega_i)\Delta\omega_i \qquad (10.7\text{-}6)$$

相位ϕ_i可以假定在 0 到2π之间具有同一概率，因此可以通过旋转一个转迹线轮（spinning a roulette wheel）〔或采用处理随机数的蒙特卡罗方法（Monte Carlo method)〕来选择。当对与波谱相应的所有频率求和时，激励$F(t)$是一随机时间函数。

把$F(t)$加于所考虑系统的微分方程，其响应$x(t)$可用计算机求得。从响应$x(t)$中可计算出自相关$R(\tau)$，而响应谱可由方程（10.6-13）或（10.6-19）求得

$$S(f)=2\int_0^\infty R(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau$$

$$=2\int_0^\infty R(\tau)e^{-s\tau}d\tau \qquad (S=i2\pi f)$$

参 考 文 献

1. Bendat, J. S. *Principles and Applications of Random Noise Theory.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1958.
2. Bendat, J. S., and Piersol, A. G. *Measurement and Analysis of Random Data.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966.
3. Blackman, R. B., and Tukey, J. W. *The Measurement of Power Spectra.* New York: Dover Publications, Inc., 1958.
4. Clarkson, B. L. "The Effect of Jet Noise on Aircraft Structures." *Aeronautical Quarterly*, Vol. 10, Part 2, May 1959.
5. Cramer, H. *The Elements of Probability Theory.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1955.
6. Crandall, S. H. *Random Vibration.* Cambridge, Mass.: The Technology Press of M.I.T., 1948.
7. Crandall, S. H. *Random Vibration.* Vol. 2. Cambridge, Mass.: The Technology Press of M.I.T., 1963.

8. Rice, S. O. *Mathematical Analysis of Random Noise*. New York: Dover Publications, Inc., 1954.

9. Robson, J. D. *Random Vibration*. Edinburgh University Press, (1964).

10. Thomson, W. T., and Barton, M. V. "The Response of Mechanical Systems to Random Excitation." *J. Appld. Mech.*, June 1957, pp. 248–51.

习　　题

10-1　列举若干随机数据的例子并对每例指出其类别。

10-2　论述非平稳数据、平稳数据和遍历性数据之间的差别。

10-3　论述我们所说的期望值是什么意思。当 8 只硬币掷100次、1000次中头像向上的期望数是什么？背面向上的概率是什么？

10-4　一只硬币掷 50 次，头像向上记作 1，背面向上记作 0。通过将出现头像向上的累积次数被掷的总次数相除的办法求头像向上的概率并将这些以所掷次数为函数的比值绘成曲线图。该曲线必然趋近于0.5。

10-5　图 P.10-5所示为一组三角形波，求其均值和均方值。



图 P.10-5

10-6　带固定分量的一种正弦波，其方程为

$$x = A_0 + A_1\sin\omega t$$

求其期望值$E(x)$和$E(x^2)$。

10-7　求整流的正弦波的均值和均方值。

10-8　频率响应曲线接近共振点的锐度通常是用 $Q = \frac{1}{2}\zeta$ 表示。位于共振点任一边响应降至值的$1/\sqrt{2}$的那些点称为半功率点。试以ω_n 和Q 来确定半功率点各自的频率。

10-9　证明下式

$$\int_0^\infty \frac{d\eta}{[1-\eta^2]^2+[2\zeta\eta]^2}=\frac{\pi}{4\zeta} \quad 对\ \zeta\ll 1$$

10-10 具有结构阻尼的某系统，其微分方程给出如下

$$m\ddot{x}+k(1+ir)x=F(t)$$

求其频率响应函数。

10-11 具有固有频率ω_n和阻率$\zeta=0.10$的某单自由度系统，受下列力的激励

$F(t)=F\cos(0.5\omega_n t-\theta_1)+F\cos(\omega_n t-\theta_2)+F\cos(2\omega_n t-\theta_3)$

证明其均方响应为

$$\overline{y^2}=(1.74+25.0+0.110)\ \frac{1}{2}\left(\frac{F}{k}\right)^2=13.43\ \left(\frac{F}{k}\right)^2$$

10-12 导出周期函数

$$f(t)=Re\sum_{n=0}^{\infty}C_n e^{in\omega_0 t}$$

的系数C_n的方程。

10-13 证明对习题12，$C_{-n}=C_n^*$且$f(t)$可写为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{in\omega_0 t}$$

10-14 求图P.10-14所示锯齿波的傅立叶级数并绘出它的谱密度，

10-15 求图P.10-15所示波的傅立叶级数的复数形式并绘出它的谱密度。

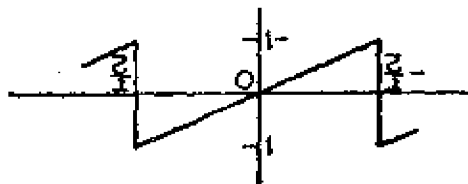


图 P.10-14

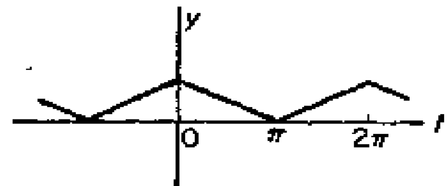


图 P.10-15

10-16 求图P.10-16所示矩形波的傅立叶级数的复数形式并绘出它的谱密度。

10-17 论述随机函数峰值的概率分布为什么一定符合瑞利分布或在形状上与瑞利分布一致相似。

10-18 证明对于高斯概率分布$p(x)$，其中心矩的计算式为

$$E(x^n)=\int_{-\infty}^{\infty}x^n p(x)\,dx=\begin{cases}0 & 当n为奇数时\\ 1、3、5、\cdots(n-1)\sigma^n & 当n为偶数时\end{cases}$$

10-19 导出正弦波的累积概率方程和概率密度函数方程并绘出这些结果。

10-20 图P.10-20所示矩形波的累积概率曲线和概率密度曲线代表什么。

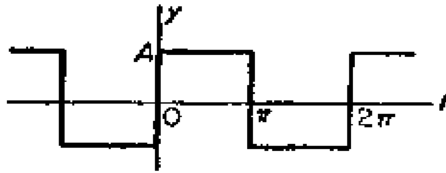


图 P.10-16

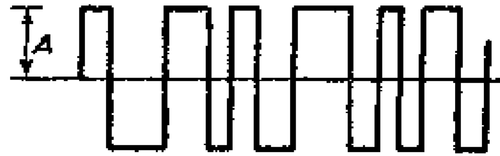


图 P.10-20

10-21 某随机信号，频率在20赫到2000赫间具有常量谱密度$S(f)=0.002$英寸^2/赫，在此频率范围外，谱密度为零。如均值为3.0英寸，求标准差及均方根值并绘出这结果。

10-22 在例10.4-3中瞬时加速度超过$53.2g$值的概率是什么？超过此值的峰值概率是什么？

10-23 求余弦波$x(t)=A\cos t$的自相关并将它与τ对比绘出。

10-24 求题10-16中矩形波的自相关。

10-25 求矩形脉冲波的自相关并将它相对于τ绘成图。

10-26 确定图P.10-26所示复序列(binary sequence)的自相关。
提示：将上述波形描绘在透明图纸上并将它移过τ。

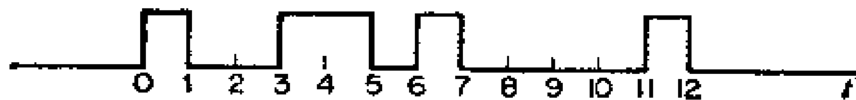


图 P.10-26

10-27 求图P.10-27所示三角形波的自相关。

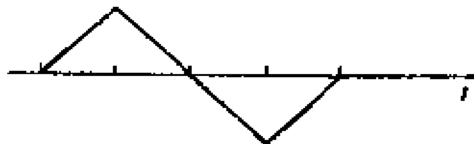


图 P.10-27

10-28 从下列关系式开始

$$x(t)=\int_0^{\infty}f(t-\xi)g(\xi)d\xi$$

并应用傅立叶变换技术，证明

$$X(i\omega)=F(i\omega)H(i\omega)$$

以及

$$\bar{x}^2=\int_0^\infty S_F(\omega)\,|H(i\omega)|^2d\omega$$

式中

$$S_F(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}F(i\omega)F^*(i\omega)$$

10-29 从下列关系式开始

$$H(i\omega)=|H(i\omega)|e^{i\phi(\omega)}$$

证明

$$\frac{H(i\omega)}{H^*(i\omega)}=e^{i2\phi(\omega)}$$

10-30 从下列两个方程式开始

$$S_{FX}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}F^*(i\omega)\ X(i\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}F^*(FH)=S_FH$$

和

$$S_{XF}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}X^*F=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}(F^*H^*)F=S_FH^*$$

证明

$$\frac{S_{FX}(\omega)}{S_{XF}(\omega)}=e^{i2\phi(\omega)}$$

和

$$\frac{S_F(\omega)}{S_{XF}(\omega)}=\frac{S_{FX}(\omega)}{S_F(\omega)}=H(i\omega)$$

10-31 某匀质细长杆的纵向运动，其微分方程为

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

证明在杆端 $x=0$处作用一任意轴向力，而杆的另一端 $x=l$ 处为自由时，响应的拉普拉斯变换为

$$\bar{u}(x,s)=\frac{-c\bar{F}(s)e^{-s(l/c)}}{sAE(1-e^{-2s(l/c)})}\{e^{(s/c)(x-l)}+e^{-(s/c)(x-l)}\}$$

10-32 如果题10-31中的力为一简谐力且$F(t)=F_0e^{i\omega t}$，证明

$$u(x,t)=\frac{cF_0e^{i\omega t}\cos[(\omega l/c)(x/l-1)]}{\omega AE\sin(\omega l/c)}$$

和

$$\sigma(x,t)=\frac{-\sin[(\omega l/c)(x/l-1)]}{\sin(\omega l/c)}\frac{F_0}{A}e^{i\omega t}$$

式中 σ 是应力。

10-33 用 $S(\omega)$ 表示 $x=0$ 处激励应力的谱密度，证明在题10-31中的均方应力为

$$\bar{\sigma}^2\cong\frac{2\pi}{r}\sum_n\frac{c}{n\pi l}S(\omega_n)\sin^2 n\pi\frac{x}{l}$$

式中结构阻尼是假设的。这个问题的主振型是

$\phi_n(x)=\sqrt{2}\cos n\pi(x/l-1)$，$\omega_n=n\pi(c/l)$，$c=\sqrt{AE/m}$。

第十一章　非 线 性 振 动

11.1　导引

线性系统分析用于解释许多振动系统的现象。可是，有些振动现象不能用线性理论来预言或解释。

在我们已研究过的线性系统中，起因和结果是成线性关系的，即如果我们将载荷加倍，那末响应也加倍。在非线性系统中，起因和结果之间的这种关系不是始终成比例的。例如，油壶底心区的运动，当小载荷时可能与所受的力成正比，但在某临界载荷时它突然变为大位移。这种相同的现象在柱子屈曲、带铁心电感电路的电振荡以及具有非线性复原力机械系统的振动中也遇到。

描述非线性振荡系统的微分方程，其一般形式为

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, x, t) = 0 \qquad (11.1\text{-}1)$$

这种方程与线性方程的区别在于求它们的解时迭加原理无效。

处理非线性微分方程的解析过程是困难的，它要求广泛的数学研究。大家知道非线性系统的精确解是相对很少的，非线性系统学科的大部分发展来自近似解和图解以及在计算机上所作的研究。然而，应用状态空间方法以及研究在相平面内描述的运动，能获得很多关于非线性系统知识。

11.2　相平面

在**自治系统**中，时间 t 没有明显地出现在运动微分方程中，而只是以时间的微分 dt 出现在该微分方程中。

我们将先研究具有下列微分方程的自治系统

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \qquad (11.2\text{-}1)$$

式中$f(x,\dot{x})$可能是x和$\dot{x}$的非线性函数。在状态空间方法中，我们将以二个一阶方程来表示上述方程：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x,y)\end{aligned} \tag{11.2-2}$$

如果x和y是笛卡尔坐标，那末$x\ y$平面称为相平面。系统的状态由坐标x和$y=\dot{x}$定义，它表示了在相平面上的一个点。当系统状态改变时，相平面上的点就运动，从而形成一条曲线，该曲线称为轨线。

另一个有用概念是状态速度V，它由下列方程定义：

$$V=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{11.2-3}$$

当状态速度为零时，达到平衡状态，该时速度$\dot{x}$和加速度$\dot{y}=\ddot{x}$均为零。

以方程（11.2-2）中的第一式除第二式，我们得出下列关系

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x,y)}{y}=\phi(x,y) \tag{11.2-4}$$

这样对于在相平面上的每一个点x，y，其$\phi(x,y)$是确定的，即轨线的斜率是单值的。

如果$y=0$（即点沿着x轴线）和$f(x,y)\neq 0$，则轨线的斜率是无穷大。因此，所有与这些点相应的轨线必须与x轴线直角相交。

如果$y=0$和$f(x,y)=0$，则斜率是不确定的。我们称这些点为奇异点。奇异点对应于一种平衡状态，该时速度$y=\dot{x}$和力$\ddot{x}=\dot{y}=-f(x,y)$均为零。进一步讨论是要求确定由奇异点描述的平衡是稳定的还是不稳定的。

例　11.2-1

确定某单自由度振荡器的相平面

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

解：令$y=\dot{x}$，则上述方程可改写为二个一阶方程

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -\omega^2 x \\ \dot{x} &= y\end{aligned}$$

相除，我们得到

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y}$$

分离变量并积分后得

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C$$

上式为一组椭圆，椭圆的尺寸是由 C 确定。上述方程也就是能量守恒方程

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = C'$$

因为奇异点是在 $x = y = 0$ 处，所以相平面的图形如图 11.2-1 所示。如果以 y/ω 代替 y 作图，则图 11.2-1 的一组椭圆将化为一组圆。

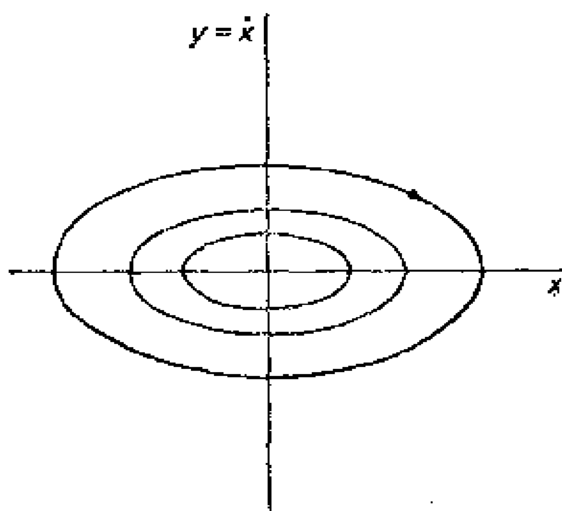


图 11.2-1

11.3 保守系统

在保守系统中总能量保持常量。每单位质量的动能与势能相加得

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E = \text{常量} \qquad (11.3\text{-}1)$$

对 $y = \dot{x}$ 求解，相平面的纵坐标由下列方程给出

$$y=\dot{x}=\pm\sqrt{2[E-U(x)]} \tag{11.3-2}$$

从这个方程式中明显看出，保守系统的轨线必对称于 x 轴线。

保守系统的运动微分方程可以下列形式表示

$$\ddot{x}=f(x) \tag{11.3-3}$$

因为 $\ddot{x}=\dot{x}(d\dot{x}/dx)$，所以上面的方程可以写为

$$\dot{x}d\dot{x}-f(x)dx=0 \tag{11.3-4}$$

我们经积分后得到

$$\frac{\dot{x}^2}{2}-\int_0^x f(x)\,dx=E \tag{11.3-5}$$

并将上式与方程式（11.3-1）相比较，我们找到

$$\begin{aligned} U(x) &= -\int_0^x f(x)\,dx \\ f(x) &= -\frac{dU}{dx} \end{aligned} \tag{11.3-6}$$

因而，对于保守系统，力等于负的势能梯度。

令 $y=\dot{x}$，方程（11.3-4）在状态空间中变成为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{y} \tag{11.3-7}$$

从这个方程中我们注意到，奇异点对应于 $f(x)=0$ 和 $y=\dot{x}=0$，所以这些点是平衡点。那么方程式（11.3-6）指出，势能曲线 $U(x)$ 在平衡点的斜率一定是零。可以证明 $U(x)$ 的最小值是稳定的平衡位置，而与 $U(x)$ 的最大值相对应的波峰顶点是不稳定的平衡位置。

平衡的稳定性 考察方程（11.3-2），E 值是由初始条件 $x(0)$ 和 $y(0)=\dot{x}(0)$ 决定的。如果这些初始条件是大的，那末 E 值亦将是大的。对于每一位置 x 有一势能 $U(x)$，为了产生运动，E 应大于 $U(x)$。否则从方程（11.3-2）中可以看出，速度 $y=\dot{x}$ 是虚数。

图11.3-1所示为 $U(x)$ 与轨线 y 相对于 x 的一般图形，图中的各个 E 值是从方程（11.3-2）中算得。

对$E=7$，$U(x)$ 曲线位于$E=7$直线下面的部分只在$x=0$到1.2，$x=3.8$到5.9以及$x=7$到8.7之间。与$E=7$相对应的轨线是一些封闭曲线，与它们有关的周期可以从方程（11.3-2）通过积分来求得

$$\tau=2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2[E-U(x)]}}$$

式中x_1和x_2是轨线在x轴线上的极点。

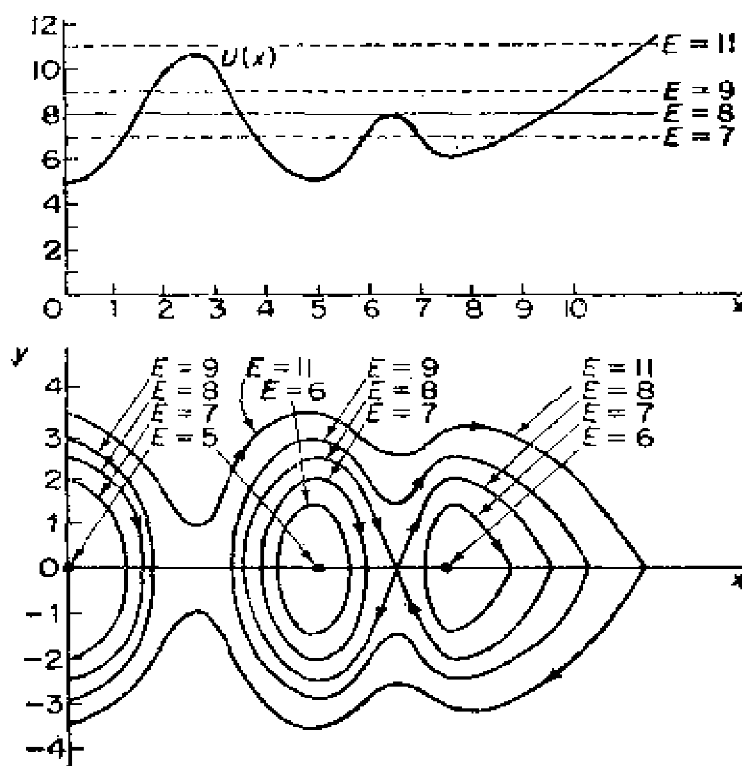


图 11.3-1

当初始条件较小时，这些封闭的轨线变得更小。对$E=6$，轨线在平衡点$x=7.5$附近缩为一点，而在平衡点$x=5$附近是一条处于$x=4.2$至5.7之间的封闭曲线。

对$E=8$，$U(x)$ 曲线在$x=6.5$处的那个最大值是与$E=8$直线相切，在这一点上的轨线具有四个分支。对$E=8$，$x=6.5$的这个点是一个鞍点，在该点处的运动是不稳定的。鞍点的轨线称

在图 11.3-1 中所给 $U(x)$ 的相平面的计算结果

$y=\pm\sqrt{2[E-U(x)]}$

x	$U(x)$	$\pm y$ 在 $(E=7)$	$\pm y$ 在 $(E=8)$	$\pm y$ 在 $(E=9)$	$\pm y$ 在 $(E=11)$
0	5.0	2.0	2.45	2.83	3.46
1.0	6.3	1.18	1.84	2.32	
1.5	8.0	虚数	0	1.41	2.45
2.0	9.6	虚数	虚数	虚数	
3.0	10.0	虚数	虚数	虚数	1.41
3.5	8.0	虚数	0	1.41	2.45
4.0	6.5	1.0	1.73	2.24	
5.0	5.0	2.0	2.45	2.83	3.46
5.5	5.7	1.61	2.24	2.57	
6.0	7.2	虚数	1.26	1.90	
6.5	8.0	虚数	0	1.41	2.45
7.0	7.0	0	1.41	2.0	
7.5	6.0	1.41	2.0	2.45	3.16
8.0	6.3	1.18	1.84	2.32	
9.0	7.4	虚数	1.09	1.79	
9.5	8.0	虚数	0	1.41	
10.0	8.8	虚数	虚数	0.63	
11.5					0

为**分界线**（*separatrices*）。

对 $E>8$，轨线可能是封闭的，也可能是不封闭的。当 $E=9$ 时在 $x=3.3$ 到 10.2 之间出现一条封闭轨线。注意，在 $x=6.5$ 处，$dU/dx=-f(x)=0$ 而当 $E=9$ 时 $y=\dot{x}\neq 0$，所以平衡不存在。

11.4 平衡稳定性

以下列一般形式表示

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{11.4-1}$$

方程式中的奇异点是由下式加以识别

$$P(x_s,y_s)=Q(x_s,y_s)=0 \tag{11.4-2}$$

当然，方程式（11.4-1）是与下列两方程式等价的

$$\frac{dx}{dt}=Q(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt}=P(x,y) \tag{11.4-3}$$

因为从上面两方程式中消去时间 dt 即为方程（11.4-1）。在奇异点邻域中对这些方程式的研究为我们提供了有关平衡稳定性的答案。

众所周知，轨线的斜率 dy/dx 不随坐标轴的平移而变化，我们将坐标轴 u，v 平移到所要研究的奇异点上，如图 11.4-1 所示。然后我们得

$$x=x_s+u$$
$$y=y_s+v$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du} \tag{11.4-4}$$

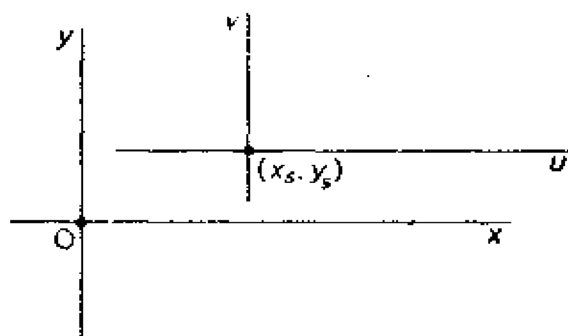


图 11.4-1

把 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 相对奇异点 (x_s,y_s) 展开成泰勒级数，我们得 $Q(x,y)$ 式如下

$$Q(x,y)=Q(x_s,y_s)+\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)_s u+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_s v+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}\right)_s u^2+\cdots \tag{11.4-5}$$

同样可得到 $P(x,y)$ 类似的方程式。因为 $Q(x_s,y_s)$ 为零，但 $(\partial Q/\partial u)_s$ 与 $(\partial Q/\partial v)_s$ 均为常量，所以方程式（11.4-1）在奇异

域中变成为

$$\frac{dv}{du}=\frac{cu+ev}{au+bv} \tag{11.4-6}$$

式中P和Q的高阶导数已略去。这样在(x_s, y_s)上奇异性的研究，当u和v小时，以研究方程式（11.4-6）来代替是允许的。

回到方程（11.4-3）并取方程（11.4-4）和（11.4-5）中的符号，则方程（11.4-6）是与下列两方程等价

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=au+bv\\ \frac{dv}{dt}&=cu+ev\end{aligned} \tag{11.4-7}$$

上式可改写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix} \tag{11.4-8}$$

在第六章第6.7节中曾指出，如果一个象方程（11.4-8）那样的矩阵方程式，它的特征值和特征向量已知，则变换（式中$[P]$是特征向量列的振型矩阵）

$$\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=[P]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix}=\left[\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ v_2\end{Bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix} \tag{11.4-9}$$

将退偶成下列形式的方程

$$\begin{Bmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{Bmatrix}=[\Lambda]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix} \tag{11.4-10}$$

因为方程（11.4-10）有下列解

$$\begin{aligned}\xi&=e^{\lambda_1 t}\\ \eta&=e^{\lambda_2 t}\end{aligned} \tag{11.4-11}$$

故u和v的解为

$$\begin{aligned}u&=u_1e^{\lambda_1 t}+u_2e^{\lambda_2 t}\\ v&=v_1e^{\lambda_1 t}+v_2e^{\lambda_2 t}\end{aligned} \tag{11.4-12}$$

那末很明显，奇异点的稳定性是与由下列特征方程确定的特征值λ_1和λ_2有关

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (e-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{a+e}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a+e}{2}\right)^2 - (ae-bc)} \quad (11.4\text{-}13)$$

这样，

如果 $(ae-bc) > \left(\frac{a+e}{2}\right)^2$，则运动是振荡的；

如果 $(ae-bc) < \left(\frac{a+e}{2}\right)^2$，则运动是非周期的；

如果 $(a+e) > 0$，则系统是不稳定的；

如果 $(a+e) < 0$，则系统是稳定的。

在奇异点邻域中的轨线类型可以由初试方程（11.4-10）来确定，其形式为

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\xi}{\eta} \quad (11.4\text{-}14)$$

上式的解为

$$\xi = (\eta)^{\lambda_1/\lambda_2}$$

并应用方程（11.4-9）的变换去绘制 v 对 u 的关系图。

11.5 等倾线法

研究具有下列方程的自激系统

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x,y)}{y} = \phi(x,y) \quad (11.5\text{-}1)$$

这已在11.2节方程（11.2-4）中讨论过。在等倾线法中我们是通过给斜率以一个规定数 α 来固定斜率 dy/dx，然后对下列曲线求解

$$\phi(x,y) = \alpha \quad (11.5\text{-}2)$$

画出一族这样的曲线，就可以从任意点 x，y 开始绘出一条轨线，如图11.5-1所示。

例　11.5-1

　　确定单摆的等倾线。

解：单摆的方程是

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \qquad (a)$$

令 $x=\theta$ 和 $y=\dot{\theta}=\dot{x}$，我们得到

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{g}{l}\frac{\sin x}{y} \qquad (b)$$

这样对 $dy/dx=\alpha$ 为常量时，等倾线方程（11.5-2）变为

$$y=-\left(\frac{g}{l\alpha}\right)\sin x \qquad (c)$$

　　从方程（b）中明显看出，奇异点位于沿 x 轴线，在 $x=0$，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$ 等处。图 11.5-2示出了与 α 负值相对应的位于第一象限的等倾线。自任意点 $x(0)$，$y(0)$开始，用向斜率线段作切线的方法就可以画出轨线的草图。

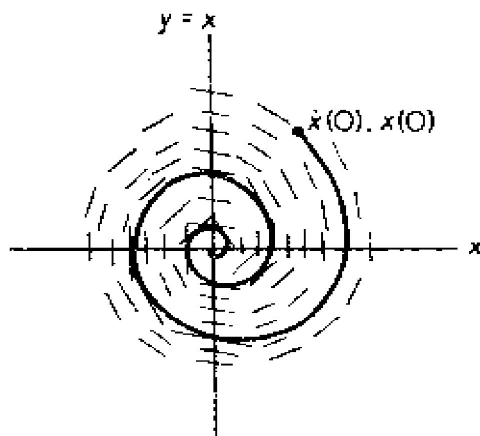


图　11.5-1

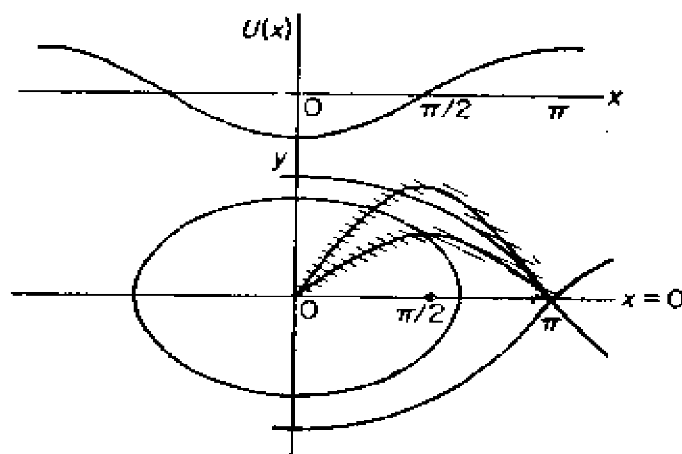


图　11.5-2　单摆的等倾线曲线

　　在这种情况下方程（a）的积分易求得如下

$$\frac{y^2}{2}-\frac{g}{l}\cos x=E$$

式中 E 是一个对应于总能量的积分常数（见方程（11.3-1））。我

们也求得了 $U(x)=-g/l\cos x$ 且使第 11.3 节中的讨论得到了应用。要有运动，E 必须大于 $-g/l$。$E=g/l$ 相应于分界线，而 $E>g/l$ 则轨线不封闭。这意味着初始条件大到足以引起摆继续摆过 $\theta=2\pi$。

例 11.5-2

重要的非线性问题之一是被广泛研究过的**范德波尔**方程：

$$\ddot{x}-\mu\dot{x}(1-x^2)+x=0$$

这个方程有点象具有粘滞阻尼的弹簧-质量系统的自由振动。然而这个方程的阻尼项是非线性的，在该项中阻尼不仅取决于速度而且也取决于位移。对于小振荡（$x<1$）阻尼是负的，振幅将随时间而增加。当 $x>1$ 时阻尼是正的，振幅将随时间而减小。若系统是从 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 开始，那末振幅将增加或减小是取决于 x 是小还是大，最终振幅将达到一个被认为是极限环（*limit cycle*）的稳定状态，用图11.5-3的相平面图可对这个问题作出图解表示。

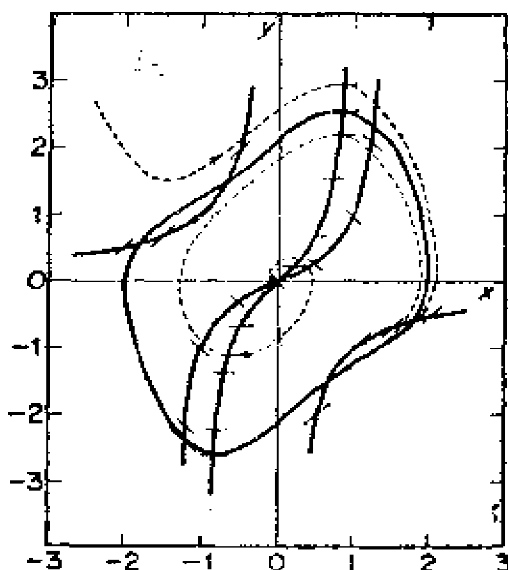


图 11.5-3 具有$\mu=1.0$的范德波尔方程的等倾线曲线

11.6 增量法

由雅可伯森（L.S.Jacobsen）❶提出的增量法是一种用以解下列方程的图解法

$$\ddot{x}+f(\dot{x},x,t)=0 \tag{11.6-1}$$

式中 $f(\dot{x},x,t)$ 必须是连续且单值。首先将上述方程增、减一项 ω_0^2x 改写为下列形式

$$\ddot{x}+f(\dot{x},x,t)-\omega_0^2x+\omega_0^2x=0 \tag{11.6-2}$$

引入由下式规定的新变量 τ 和 y

$$\tau=\omega_0 t \quad 和 \quad y=\frac{dx}{d\tau}=\frac{\dot{x}}{\omega_0} \tag{11.6-3}$$

且令

$$\delta(x,y,\tau)=\frac{1}{\omega_0^2}[f(\dot{x},x,t)-\omega_0^2x] \tag{11.6-4}$$

方程（11.6-2）可改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(x+\delta)}{y} \tag{11.6-5}$$

在方程（11.6-4）中给出的函数 $\delta(x,y,\tau)$ 取决于变量 x、y 和 τ；然而当这些变量只有小的改变时，函数 δ 可假设为常量。当 δ 为常量时，方程（11.6-5）可积分为

$$(x+\delta)^2+y^2=\rho^2=常量 \tag{11.6-6}$$

上述方程是一个半径为 ρ 圆心在 $y=0$、$x=-\delta$ 的圆方程。这样对于 τ 的小增量，其解对应于圆的一段小弧，如图11.6-1所示。

轨线的绘制步骤如下：

（1）在相平面上确定初始点 $P(x_0y_0)$ 的位置。

（2）由方程式（11.6-4）计算出 $\delta(x_0,y_0,0)$ 的初始值并在 x 轴线上确定 $-\delta$ 点的位置。

❶ L.S.Jacobsen, "On a General Method of Solving Second Order Ordinary Differential Equations by Phase Plane Displacements," *J.Appl.Mech*.19 (December 1952), pp.543-53.

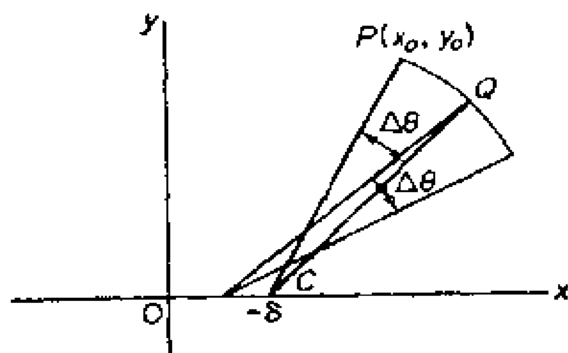


图 11.6-1

（3）以（$-\delta$,0）为圆心，过点 $P(x_0y_0)$ 绘一短弧。使解有效的弧长大小取决于假定为定值的 δ 的变差。

（4）对 $\Delta\theta$ 的一个假定值，在轨线上定出另一点 Q，并用与 Q 点相应的 x，y 新值，计算出新的δ。

（5）通过新的 $-\delta$ 及 Q 点画一直线，再从此直线量出为了定第三点的角 $\Delta\theta$，如图 11.6-1 所示。然后重复上述步骤。

直线 CP 的转角 $d\theta$ 与时间增量 $d\tau$ 之间的关系可从下式求得：

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{y^2 + (x+\delta)^2}}$$

以方程（11.6-5）代上式中的 dy/dx 并从方程（11.6-3）中注意到 $dx = yd\tau$，我们得到

$$d\theta = \frac{dx}{y} = d\tau \qquad (11.6\text{-}7)$$

从方程（11.6-5）中也明显看出在第一象限中轨线的斜率是负值，$d\theta$ 是向顺时针方向推进。

例　11.6-1

确定下列方程的相平面轨线

$$\ddot{x} + \mu|\dot{x}|\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

用 $\omega = 10$ 且 $x(0) = 4$，$\dot{x}(0) = 0$。

解：首先我们以 $\tau=\omega t$ 和 $\frac{dx}{d\tau}=y$ 替代使方程式简化成下列形式

$$\frac{dy}{d\tau}+\mu|y|y+x=0$$

或

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(\mu|y|y+x)}{y}$$

这样增量法的 δ 是

$$\delta=\mu|y|y$$

对 μ 的一个给定值，上式是一条抛物线如在图11.6-2上所绘的。如果把增量法应用于这个问题，那末对任意点 P，其轨线弧的中心 $-\delta$ 是 M。这样在半圆中 M 点的运动是从原点移到与 $-\delta$ 的最大值相对应的某一极限点，然后重新返回到 0 。

这里我们将考虑用平均 δ 法来代替所采用的逐步增量法，这种方法使能够对半周一次画出轨线如同以 $-\delta$ 的平均值为圆心的

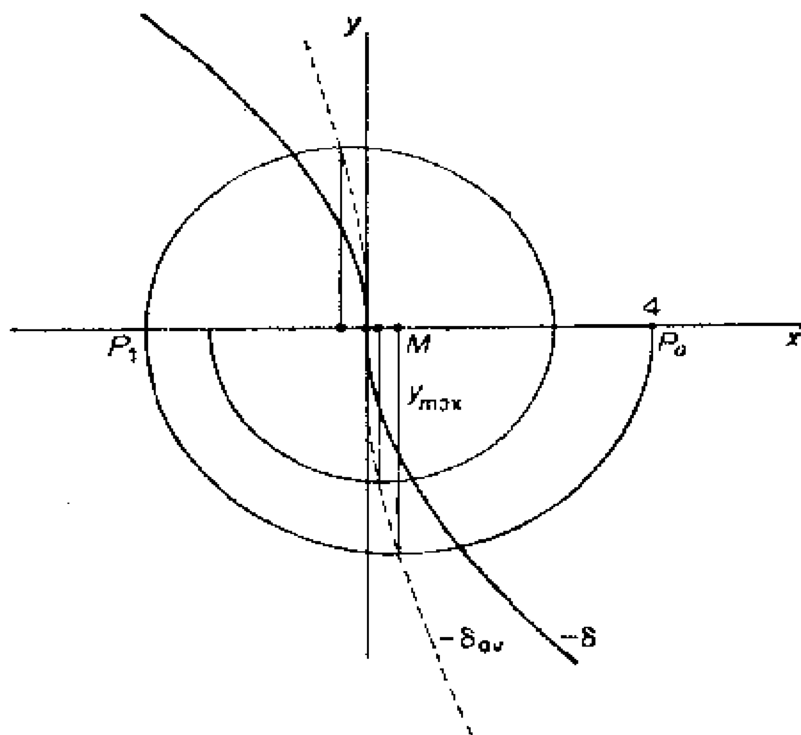


图 11.6-2

一个圆。

这个问题的平均 $-\delta$ 能够对任何 y 用下列积分求出

$$\delta_{av}=\frac{1}{y}\int_0^y \mu\, y^2 dy=\mu\frac{y^2}{3}$$

这样为 1/3 初增量的平均 δ 曲线能在相平面上绘出，且以 $-\delta_{av}$为中心的轨线必在 $x=-\delta_{av}$ 的点切割这一曲线。这一点只要用圆规经反复试验（使$MP_0=MP_1=My_{max}$）是易于做到的。

11.7 列纳法（LIENARD'S METHOD）

当方程中的阻尼项是某种非线性速度函数 $f(\dot{x})$ 的情况下，相平面轨线可以用列纳[1]提出的方法来图解确定。所讨论的微分方程的形式为

$$\ddot{x}+f(\dot{x})+x=0 \qquad (11.7\text{-}1)$$

用 $y=\dot{x}$ 则方程可写为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(y)+x}{y} \qquad (11.7\text{-}2)$$

第一步在 x,y 平面上绘出 $x=-f(y)$ 曲线如图 11.7-1 所示。以任意点 $P(x,y)$开始，从 P 点作一直线平行于 x 轴线，使与 $x=-f(y)$曲线相交于 Q，从 Q 作 x 轴的垂线交 x 轴于 C。直线 CP 的斜率是

$$\frac{y}{x+f(y)}=-\frac{dx}{dy}$$

所以 CP 在 P 处垂直于轨线，轨线在 P 处的斜率为 dy/dx。

例 11.7-1

确定一具有库仑阻尼的弹簧-质量系统的相平面图。

解：运动微分方程是

$$\ddot{x}+f(\dot{x})+\omega^2x=0$$

式中

[1] A. Lienard, "Etudes des Oscillations Entretenues," *Rev. Gen. del' Elec.*, 23 (1928), pp. 901-12, 946-54.

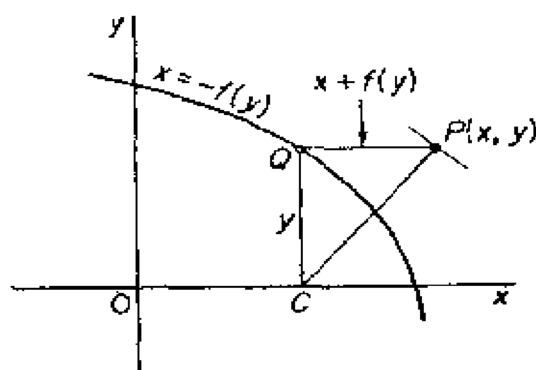


图 11.7-1

$$f(\dot{x})=\begin{cases}+\mu g & 当\dot{x}>0时\\ -\mu g & 当\dot{x}<0时\end{cases}$$

令 $\tau=\omega t$，$y=dx/d\tau$，则上述方程改写为

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{f_1(y)+x}{y}$$

式中

$$f_1(y)=\begin{cases}+b & 当 y>0 时\\ -b & 当 y<0 时\\ \left(b=\frac{\mu g}{\omega^2}\right)\end{cases}$$

因而，当 y 为正时 $x=-f_1(y)$ 曲线是 $-b$ 而当 y 为负时 $x=-f_1(y)$ 曲线是 $+b$，如图 11.7-2 所示。显然，点（$-b$，0）是所有位于 x 轴线上方的点的中心，而点（$+b$，0）是位于 x 轴线下方曲线的中心。这样在每半个平面上的曲线都是圆周。当曲线在 $\pm b$ 点间与 x 轴线相交时运动终止。

11.8 斜率线数值积分[1]

斜率线法是建立在逐步积分过程的基础上的，从此发展了一种图解作图法。我们将介绍用简单一阶微分方程说明的基本原理。此法对于用两个一阶方程表示的二阶微分方程也是适用的。

[1] 见参考文献 12。

考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t) \qquad (11.8\text{-}1)$$

保持下列增量关系

$$\Delta x=f_{av}(t)\Delta t \qquad (11.8\text{-}2)$$

式中

$$f_{av}(t)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t)dt \qquad (11.8\text{-}3)$$

$$\Delta t=(t_{i+1}-t_i)$$

$$\Delta x=(x_{i+1}-x_i)$$

$f(t)$的均值现在由它的算术平均数来代替

$$f_{av}(t)=\frac{1}{2}(f_i+f_{i+1}) \qquad (11.8\text{-}4)$$

式中

$$f_i=f(t_i) \quad 和 \quad f_{i+1}=f(t_{i+1})$$

因而方程式（11.8-2）变为

$$\Delta x=[f(t_i)+f(t_i+\Delta t)]\frac{\Delta t}{2} \qquad (11.8\text{-}5)$$

把上述过程转化为图解法，我们从在x、$f(t)$平面绘制P_0点的起始值x_0、t_0和$f(t_0)$开始，如图11.8-1 所示。假设一时间增

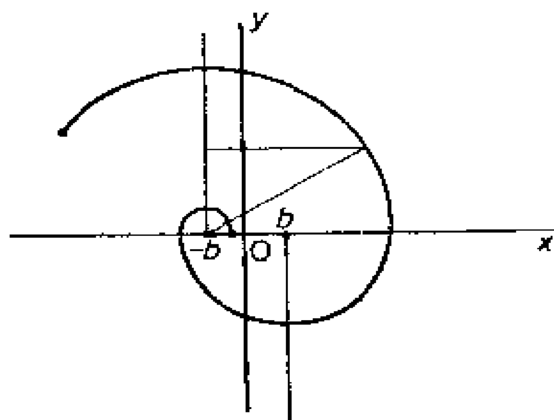


图 11.7-2

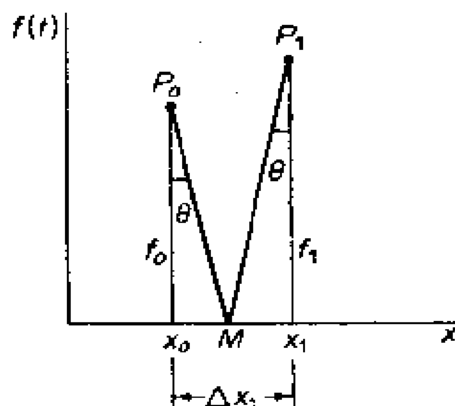


图 11.8-1

量Δt，以下列角度 θ 画出直线P_0M

$$\tan\theta=\frac{\Delta t}{2} \qquad (11.8\text{-}6)$$

以同样角度 θ 自M画出另一直线MP_1。P_1的纵坐标是$f_1=f(t_0+\Delta t)$，增量 Δx_1 被确定为

$$\Delta x_1=f_0\tan\theta+f_1\tan\theta=(f_0+f_1)\frac{\Delta t}{2}$$

此式就是方程式（11.8-5）。

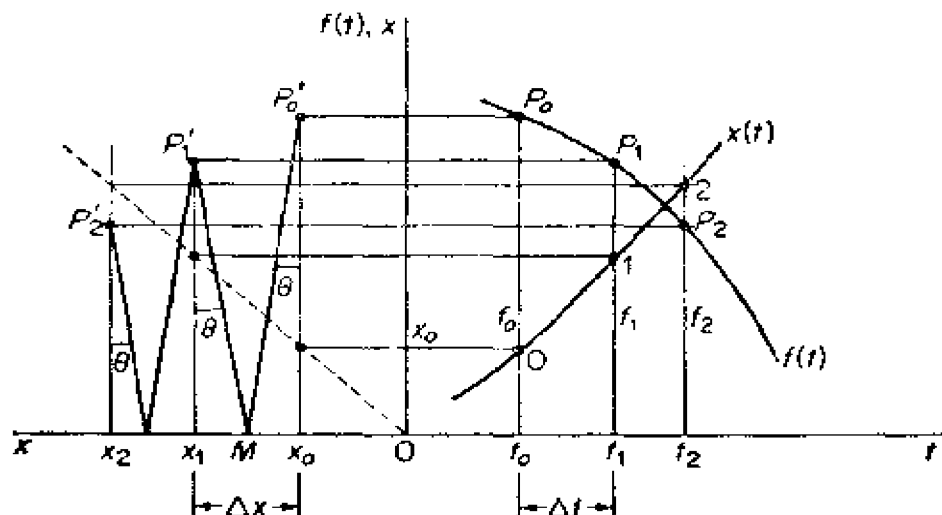


图 11.8-2

图11.8-2 示出了求上面过程的一种方便步骤。将函数 $f(t)$ 画在 t 及 $f(t)$ 坐标右面的半平面上。左面半平面的坐标是 x 和 $f(t)$，45°虚线只是用来将 x 值从水平轴转为垂直轴。图解过程的次序如下：

（1）以初始点 $P_0=f(t_0)$开始。

（2）从P_0画水平线至 P_0'，P_0'由 x_0来定位。

（3）用由方程式（11.8-6）中求得的 θ 角画直线 $P_0'M$ 及 MP_1'。选定 Δt，则在曲线 $f(t)$ 上的 P_1 点就已知，从而可定出 P_1'。

（4）现在 x_1值已知，通过45°线将其转移到右半平面的 t_1。

（5）再从 P_1' 画 θ 角斜线并重复上述过程。通过0，1，2等点所作的曲线就是解 $x(t)$。

上述过程也适用于具有下列形式的一阶方程

$$\frac{dx}{dt}=F(x) \tag{11.8-7}$$

因为初始条件 x_0，t_0使我们能定出初始点 P_0的位置。

这里描述的方法，作些改变就能适用于用下列一阶联立方程代表的二阶方程式

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}+g(x)-y=0\\&\frac{dy}{dt}+h(y)+x=0\end{aligned} \tag{11.8-8}$$

它与下列二阶方程式等价

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dg}{dx}\ \frac{dx}{dt}+h\left(\frac{dx}{dt}+g\right)+x=0 \tag{11.8-9}$$

为了用图解法求得在 x、y 平面上的一阶联立方程组（方程组11.8-8）的解，首先将函数 $g(x)$ 和 $-h(y)$ 分别对着 x 轴和 y 轴画出，如图11.8-3所示。这样做的理由是明显的，如果方程组（11.8-8）改写为

$$\frac{dx}{dt}=y-g(x)$$

$$\frac{dy}{dt}=-[x+h(y)]$$

再与方程（11.8-1）或与方程（11.8-7）相比较。在这里纵坐标 $y-g(x)$和$x-[-h(y)]$代替了$f(t)$或$f(x)$。

图解作图程序如下：

（1）确定对应于初始时间t_0的初始点$P_0(x_0,\ y_0)$。

（2）从P_0向$g(x)$曲线画斜线P_0M，使该斜线与垂直线之间的夹角为 $\theta=\tan^{-1}(\Delta t/2)$。从$M$以同样的夹角 θ 画另一条斜线Mm。

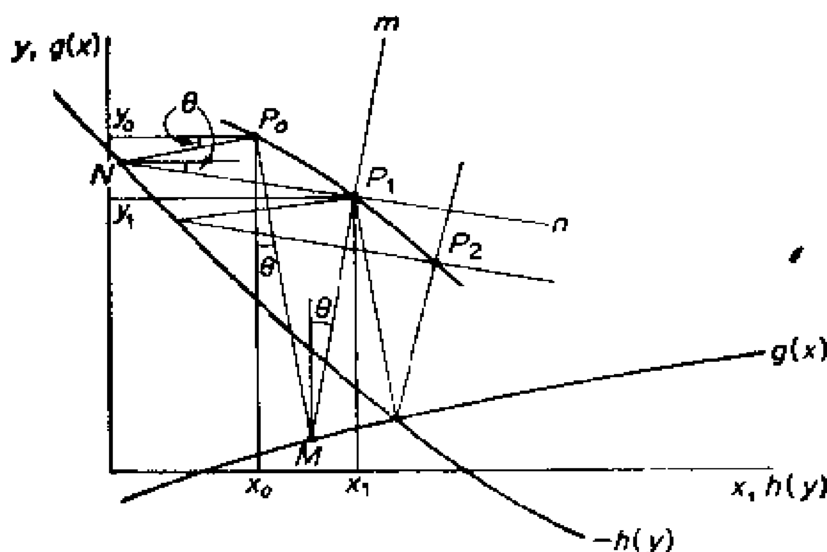


图 11.8-3

（3） 从 P_0 向 $-h(y)$ 曲线画斜线 P_0N，使该斜线与水平线之间的夹角为 $\theta=\tan^{-1}(\Delta t/2)$ 。从N以同样的夹角 θ画另一条斜线Nn。

（4） 直线 Mm与直线 Nn的交点 $P_1(x_1y_1)$ 就是在时间 $t_1=t_0+\Delta t$ 时位于相平面xy上的解。

（5） 现在从P_1点出发重复上述过程。

例 11.8-1

应用斜率线法解下列方程

$$\frac{dx}{dt}=\phi(x)$$

解：将上述方程整理成下列形式

$$dt=\frac{1}{\phi(x)}dx$$

再与改写成下列形式的方程(11.8-1)进行比较

$$dx=f(t)dt$$

很明显，只要以x代t，以$1/\phi(x)$代$f(x)$，那末上述问题的图解就可按图11.8-2那样进行。方程的斜率也必定是

$$\tan\theta = \frac{\Delta x}{2}$$

图11.8-4示出了图解作图是如何进行的。从相应于 x_0 的 P_0 点开始，确定与 t_0相对应的 P'_0点。应用45°线可将时间轴线投射到垂直轴线上，这样位于右面象限x，t 平面上的 0 点代表解中的第一个点。选定一 Δx，确定 P_1点和 P'_1 点，再从45°线画一水平线至 1 点。用 Δx对P_2点按上述过程重复作图等等。

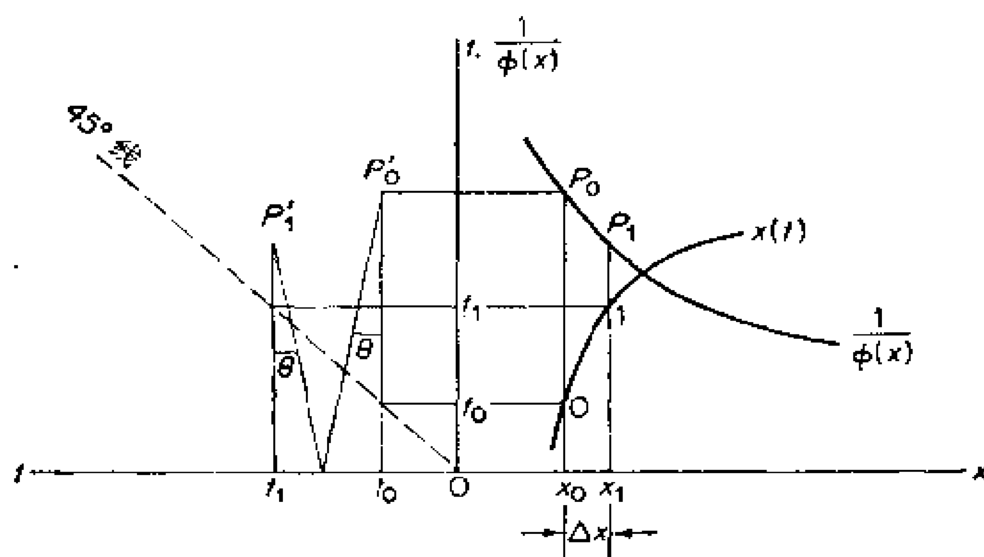


图 11.8-4

11.9 摄动法

摄动法是适用于解决小参数 μ 与微分方程的非线性项相结合的那些问题。这类问题的解是由摄动参数 μ 的级数构成，它是在线性问题解的邻域中发展的结果。如果线性问题的解是周期性的，且 μ 是小的，那末我们可以期望摄动解也是周期性的。我们可以从相平面中推论，凡属周期性的解一定描绘出一条封闭轨线。因而由初始条件决定的周期是振幅的函数。

现在研究加在非线性弹簧上质量的自由振荡，它由下列方程定义

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x+\mu x^3=0 \qquad (11.9\text{-}1)$$

并具有初始条件$x(0)=A$和$\dot{x}(0)=0$。当$\mu=0$时，振荡频率就是线性系统的频率$\omega_n=\sqrt{k/m}$。

我们寻找一个以摄动参数μ的无穷级数形式来表示的解如下

$$x=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2 x_2(t)+\cdots \qquad (11.9\text{-}2)$$

此外，我们知道非线性振荡的频率不仅取决于振荡的振幅，而且也取决于μ。我们也以μ的级数来表示这个事实

$$\omega^2=\omega_n^2+\mu\alpha_1+\mu^2\alpha_2+\cdots \qquad (11.9\text{-}3)$$

式中α_i是尚未确定的振幅函数，而ω是非线性振荡的频率。

我们将只考虑方程(11.9-2)和方程(11.9-3)中前面两项，这已足以说明整个过程。将这些代入方程(11.9-1)，我们得到

$$\ddot{x}_0+\mu\ddot{x}_1+(\omega^2-\mu\alpha_1)(x_0+\mu x_1)+\mu(x_0^3+3\mu x_0^2 x_1+\cdots)=0$$

$$(11.9\text{-}4)$$

因为摄动参数μ可任意选定，所以μ各次幂的系数必等于零。这一点导出了下列能逐步求解的方程组

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_0+\omega^2 x_0=0\\&\ddot{x}_1+\omega^2 x_1=\alpha_1 x_0-x_0^3\\&\vdots\end{aligned} \qquad (11.9\text{-}5)$$

属于初始条件$x(0)=A$，$\dot{x}(0)=0$的第一方程的解是

$$x_0=A\cos\omega t \qquad (11.9\text{-}6)$$

此式称为母解(*generating solution*)。将此式代入方程组(11.9-5)中第二个方程式的右边，我们得到

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1+\omega^2 x_1&=\alpha_1 A\cos\omega t-A^3\cos^3\omega t\\&=\left(\alpha_1-\frac{3}{4}A^2\right)A\cos\omega t-\frac{A^3}{4}\cos 3\omega t\end{aligned} \qquad (11.9\text{-}7)$$

式中用了$\cos^3\omega t=\frac{3}{4}\cos\omega t+\frac{1}{4}\cos 3\omega t$。这里强迫项$\cos\omega t$总要导致$x_1$解的特征项$t\cos\omega t$(即有共振条件)。该项违反了周期运动这一原先的规定，因此我们只能取下列条件

$$\left(\alpha_1 - \frac{3}{4}A^2\right) = 0$$

这样α_1（我们早已说明过是振幅A的某一函数）的取值等于

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}A^2 \tag{11.9-8}$$

从方程式右边消去强迫项$\cos\omega t$，则x_1的一般解为

$$x_1 = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{A^3}{32\omega^2}\cos 3\omega t$$
$$\omega^3 = \omega_n^2 + \frac{3}{4}\mu A^2 \tag{11.9-9}$$

利用初始条件$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$，则常数$C_1$和$C_2$取值为

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = -\frac{A^3}{32\omega^2}$$

这样

$$x_1 = \frac{A^3}{32\omega^2}(\cos 3\omega t - \cos\omega t) \tag{11.9-10}$$

从方程(11.9-2)可求出这点的解为

$$x = A\cos\omega t + \mu\frac{A^3}{32\omega^2}(\cos 3\omega t - \cos\omega t)$$
$$\omega = \omega_n\sqrt{1 + \frac{3}{4}\frac{\mu A^2}{\omega_0^2}} \tag{11.9-11}$$

这样所求得的解是周期性的，其基频ω随振幅的增加而增加，象对硬弹簧要求的那样。

麦督尤方程(*Mathieu Equation*)　研究下列非线性方程

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + \mu x^3 = F\cos\omega t \tag{a}$$

并假设其摄动解为

$$x = x_1(t) + \xi(t) \tag{b}$$ [1]

将方程(b)代入方程(a)，我们得到下列两个方程

$$\ddot{x}_1 + \omega_n^2 x_1 + \mu x_1^3 = F\cos\omega t \tag{c}$$

[1] 见参考文献5，第259～273页。

$$\ddot{\xi}+(\omega_n^2+\mu 3x_1^2)\xi=0 \qquad (d)$$

如果假设μ是小的，我们可令

$$x_1 \cong A\sin\omega t \qquad (e)$$

将它代入方程（d），则方程（d）变为

$$\ddot{\xi}+\left[\left(\omega_n^2+\frac{3\mu}{2}A^2\right)-\frac{3\mu}{2}A^2\cos 2\omega t\right]\xi=0 \qquad (f)$$

这个方程就是下列形式的方程

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a-2b\cos 2z)y=0 \qquad (g)$$

该式就是大家熟悉的麦雪尤方程。麦雪尤方程的稳定区域和不稳定区域取决于参数a和b，并示于图11.9-1。

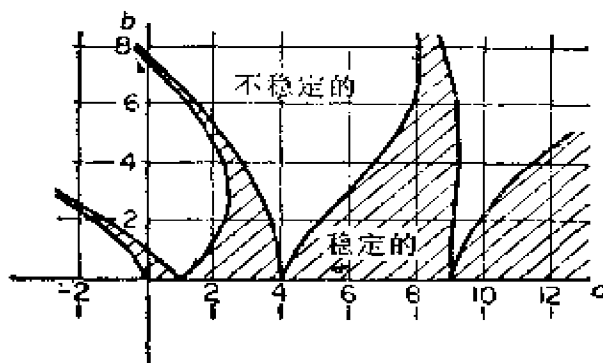


图 11.9-1 麦雪尤方程的稳定区域用打斜线的面积表示，它对称于水平轴线

11.10 迭代法

杜芬（Duffing）[1]对下列方程式作过详尽的研究

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx\pm\mu x^3=F\cos\omega t$$

上式描述加在三次弹簧上一质量承受谐激励。式中±号用于硬弹簧或软弹簧。这个方程式是非自激的，时间t明显地出现在强迫项中。

在这节中我们想研讨一个阻尼为零的较简单问题，其微分方

[1] 见参考文献7。

程写成下列形式

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x \pm \mu x^3 = F\cos\omega t \qquad (11.10\text{-}1)$$

我们采用迭代法仅探求稳定状态的简谐解，迭代法从本质上说是一种逐步逼近过程。先把假定的一个解代入微分方程，经积分后得到一个较精确的解。上述过程可以经多次重复以达到要求的精度。

对于第一个假定解，令

$$x_0 = A\cos\omega t \qquad (11.10\text{-}2)$$

将其代入微分方程，得

$$\ddot{x} = -\omega_n^2 A\cos\omega t \mp \mu A^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\right) + F\cos\omega t$$

$$= \left(-\omega_n^2 A \mp \frac{3}{4}\mu A^3 + F\right)\cos\omega t \mp \frac{1}{4}\mu A^3\cos 3\omega t$$

在积分这个方程时如果方程的解是具有周期 $\tau = 2\pi/\omega$的谐波，那末必须使积分常数为零。这样我们得到改进解为

$$x_1 = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega_n^2 A \pm \frac{3}{4}\mu A^3 - F\right)\cos\omega t \mp \cdots \qquad (11.10\text{-}3)$$

式中忽略了更高的谐波项。

上述求解过程可以重复进行但我们不再继续做下去了。杜芬在这点上的推论是：如果第一近似值与第二近似值都是这个问题的合理解的话，那末在方程(11.10-2)和(11.10-3)中 $\cos\omega t$ 的系数不应有大的差别。这样，使这些系数相等，我们得到

$$A = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega_n^2 A \pm \frac{3}{4}\mu A^3 - F\right) \qquad (11.10\text{-}4)$$

上式可对ω^2解出如下

$$\omega^2 = \omega_n^2 \pm \frac{3}{4}\mu A^2 - \frac{F}{A} \qquad (11.10\text{-}5)$$

从这个方程式中可以明显地看出，如果非线性参数为零，则我们获得线性系统的精确解

$$A = \frac{F}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

当$\mu \neq 0$时，频率ω是μ、F和A的函数。显然，当$F = 0$时，我们获得在上节中讨论过的自由振动的频率方程

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 \pm \frac{3}{4}\mu\frac{A^2}{\omega_n^2}$$

这里我们看出，对硬弹簧（+）频率随振幅的增加而增加，而对软弹簧（-）频率则随振幅的增加而减少。

当$\mu \neq 0$且$F \neq 0$时，保持μ和F两者都不变，绘出$|A|$相对于ω/ω_n的图形是方便的。在这些曲线的作图中，将方程(11.10-5)整理成下式是有帮助的

$$\frac{3}{4}\mu\frac{A^3}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)A - \frac{F}{\omega_n^2} \qquad (11.10\text{-}6)$$

上式两边都可相对于A作图如图11.10-1所示。这个方程的左边是一条三次曲线，而右边是一条斜率为$(1-\omega^2/\omega_n^2)$、截距为$-F/\omega_n^2$的直线。当$\omega/\omega_n < 1$时，该两曲线相交于1、2、3三点，这在振幅-频率图上也已示出。当ω/ω_n向1增加时，点2和点3相互接近，之后适合方程(11.10-6)的振幅值只有一个。当$\omega/\omega_n = 1$或当$\omega/\omega_n > 1$时，这些点就是点4和点5。

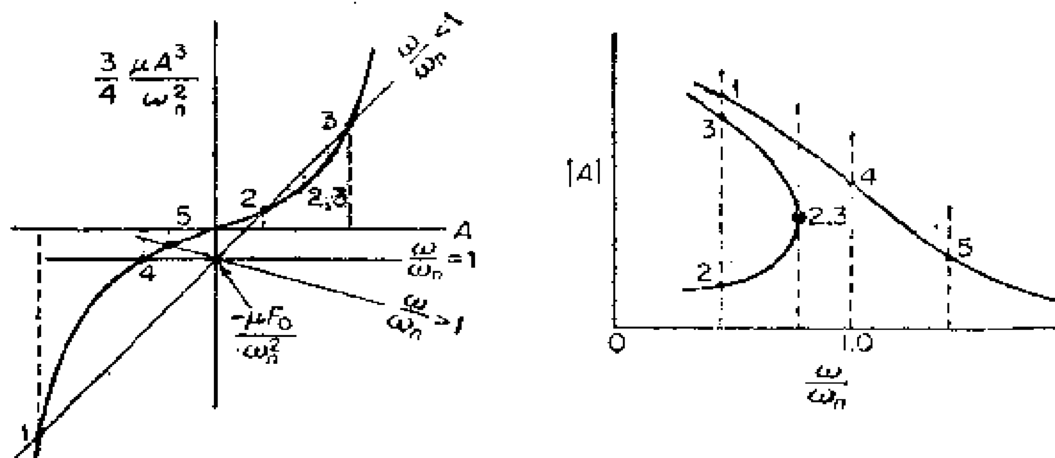


图 11.10-1　方程式11.10-6的解

跳跃现象 在这类问题中，发现在近共振时振幅经受一突然间断跳跃。这种跳跃现象可描述如下。对于软弹簧，振幅随激励频率的增长而逐渐增大直到在图11.10-2上的“a”点。然后振幅突然跳跃到由 b 点所示的一个较大值，其后振幅值沿曲线向右减小。当频率从某点 c 减小时，振幅继续增加超过 b 点到 d 点，突然降落到一个更小值 e 点。振幅-频率曲线图中打斜线的阴影区是不稳定区域，不稳定程度取决于许多因素，如存在的阻尼的总量，激励频率的变化率等。如果选用一个硬弹簧来代替软弹簧，那末同一类型的分析也适用，其结果是一条在图 11.10-3 上所示那一类型的曲线。

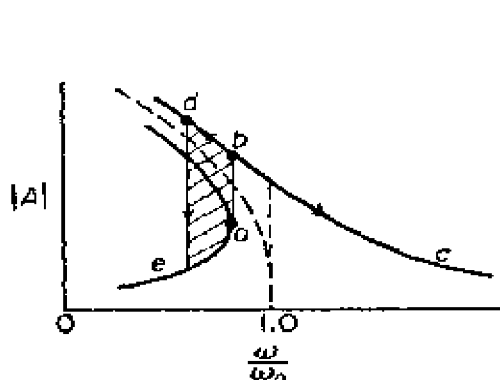


图 11.10-2 软弹簧的跳跃现象

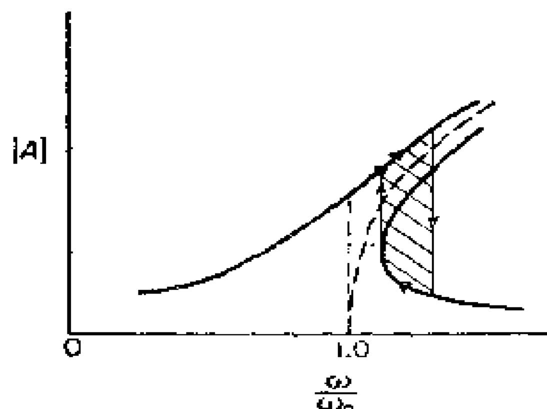


图 11.10-3 硬弹簧的跳跃现象

阻尼效应 在无阻尼状态，振幅-频率曲线渐近于脊骨曲线(backbone curve)(用点线表示)。对于线性系统也是这种情况，该时脊骨线是在 $\omega/\omega_n=1.0$ 处的一条垂直线。

带小阻尼系统的性状与无阻尼系统的情况相比没有明显的不同。用以代替脊骨曲线的那条曲线的上端将闭合成连续曲线，如图 11.10-4 所示。这里跳跃现象也同样存在，但阻尼有助于减小不稳定区域的尺寸。

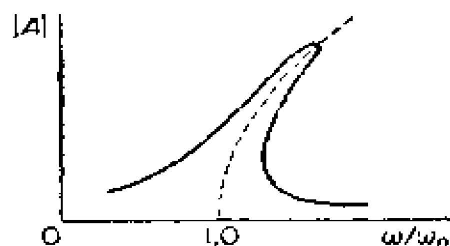


图 11.10-4

逐次逼近法也适用于阻尼振动情况。在处理它时其主要差别在于力与位移间存在的相位角不再为0°或180°，如无阻尼问题时那样。我们发现宁愿在力项中引入相位而不在位移中引入相位，这样可使代数运算有点简化。这样微分方程可写为

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_n^2 x + \mu x^3 = F\cos(\omega t + \phi)$$
$$= A_0\cos\omega t - B_0\sin\omega t \quad (11.10\text{-}7)$$

式中力的大小是

$$F = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} \quad (11.10\text{-}8)$$

从下式可以确定相位

$$\tan\phi = \frac{B_0}{A_0}$$

假设第一近似值是

$$x_0 = A\cos\omega t$$

将上式代入微分方程，其结果为

$$\left[(\omega_n^2 - \omega^2)A + \frac{3}{4}\mu A^3\right]\cos\omega t - c\omega A\sin\omega t + \frac{1}{4}\mu A^3\cos 3\omega t$$
$$= A_0\cos\omega t - B_0\sin\omega t \quad (11.10\text{-}9)$$

我们再略去$\cos 3\omega t$项并使等式左右的 $\cos\omega t$项和$\sin\omega t$项的系数分别相等，得到

$$\left.\begin{aligned}(\omega_n^2 - \omega^2)A + \frac{3}{4}\mu A^3 &= A_0 \\ c\omega A &= B_0\end{aligned}\right\} \quad (11.10\text{-}10)$$

将上式平方后再相加，则频率、振幅和力之间的关系变为

$$F^2 = \left[(\omega_n^2 - \omega^2)A + \frac{3}{4}\mu A^3\right]^2 + [c\omega A]^2 \quad (11.10\text{-}11)$$

用固定μ、c和F的办法，就可以对A的给定值计算出频率比ω/ω_n。

例 11.10-1

采用迭代法解下列线性方程的周期

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (a)$$

其初始条件是$x(0) = A$和$\dot{x}(0) = 0$。

解●：　假设第一解为$x=1$并将其代入微分方程

$$\ddot{x} = -\omega_n^2\,1$$

积分后得到

$$\dot{x} = -\omega_n^2\int_0^{\xi} 1\,d\xi = -\omega_n^2\xi$$

和

$$\int_A^x dx = -\omega_n^2\int_0^t \xi d\xi$$

$$x(t) = A - \omega_n^2\frac{t^2}{2} \tag{b}$$

令1/4周的时间$t=t_1$并注意到$x(t_1)=0$，则上面的方程可写为

$$x = A\left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right) \tag{c}$$

现在我们将方程（c）代入方程（a）并重复上述过程

$$\dot{x}(t) = -\omega_n^2 A\int_0^{\xi}\left(1 - \frac{\xi^2}{t_1^2}\right)d\xi$$

$$= -\omega_n^2 A\left(\xi - \frac{\xi^3}{3t_1^2}\right)$$

$$x(t) = A - \omega_n^2 A\int_0^t\left(\xi - \frac{\xi^3}{3t_1^2}\right)d\xi \tag{d}$$

$$= A - \omega_n^2 A\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12t_1^2}\right)$$

再令$t=t_1$并$x(t_1)=0$

$$0 = A\left[1 - \omega_n^2\left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_1^2}{12}\right)\right]$$

对t_1求解我们得到

$$t_1 = \frac{1}{\omega_n}\sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{\tau}{2\pi}\sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{\tau}{4.05}$$

这样我们发现经两次迭代后所求得的t_1值已接近等于精确值$\tau/4$。

● 见参考文献2。

11.11 自激振荡

由其自身运动决定的振荡称为自激振荡。汽车车轮的跳动，飞机机翼的颤振，以及范德波尔方程的振荡等都是这类自激振荡的例子。

在线性系统或非线性系统中都可能发生自激振荡。运动是由某激励引起的，该激励是速度的某函数或是速度和位移的某函数。如果系统的运动导致系统能量的增加，那末振幅也将增大，从而可使系统变为不稳定。

作为一个例子，我们来研究具有粘滞阻尼的单自由度线性系统被一力激励，该激励力是速度的某种函数。该系统的运动方程是

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(\dot{x}) \qquad (11.11\text{-}1)$$

将上述方程整理成下列形式

$$m\ddot{x} + (c\dot{x} - F(\dot{x})) + kx = 0 \qquad (11.11\text{-}2)$$

如果 $F(\dot{x})$ 变得比 $c\dot{x}$ 更大时，我们能够清楚地认识到出现负阻尼的可能性。假设 $\phi(\dot{x}) = c\dot{x} - F(\dot{x})$ 在方程（11.11-2）中的变化如图 11.11-1所示。对于小速度，外观阻尼 $\phi(\dot{x})$ 是负值，振荡的振幅将增大。对于大速度则相反，即外观阻尼 $\phi(\dot{x})$ 是正值，振荡的振幅将减小，因此振荡将趋向于一极限环。

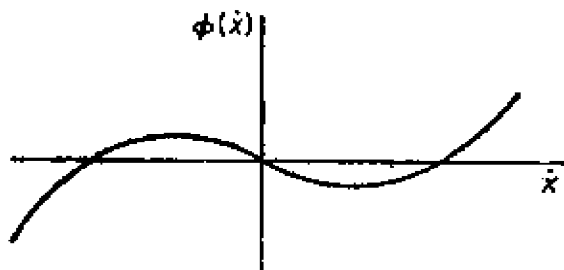


图 11.11-1 具有外观阻尼$\phi(\dot{x}) = c\dot{x} - F(\dot{x})$的系统

例 11.11-1

动摩擦系数 μ_k总是要比静摩擦系数μ_s小，这种差别将随速度

的增大而略有增加。这里如果开动图 11.11-2 中的传送带，质量 m 将随传送带一起运动直到弹簧力被静摩擦力所平衡。

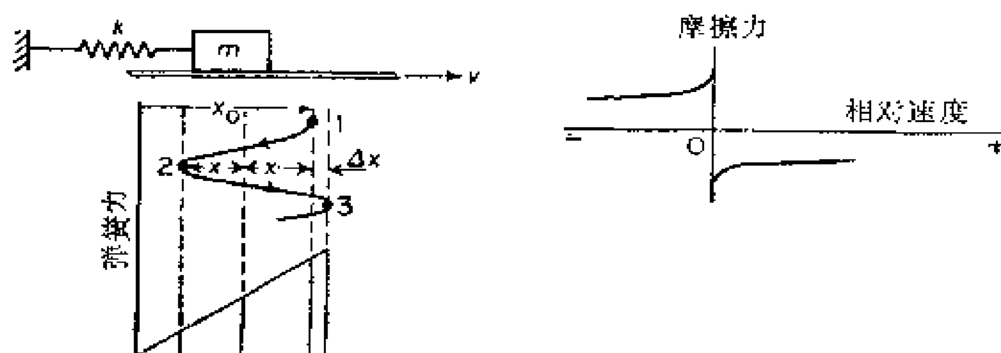


图 11.11-2 传送带与质量 m 之间的库仑摩擦

$$kx_0 = \mu_s mg \qquad (a)$$

在这一点质量将开始向左返回运动，弹簧力将被动摩擦力再次平衡，该时

$$k(x_0 - x) = \mu_{kl} mg$$

从上面两个方程式中，找出振荡的振幅是

$$x = x_0 - \mu_{kl}\frac{mg}{k} = \frac{(\mu_s - \mu_{kl})g}{\omega_n^2} \qquad (b)$$

当质量 m 向左运动时，质量 m 与传送带之间的相对速度要比当质量 m 向右运动时大，所以 μ_{kl} 是比 μ_{kr} 小，此处下标 l 表示向左，下标 r 表示向右。显然，由摩擦力所做的功，当质量 m 向右运动时要比向左运动时大，因此输入弹簧-质量系统的能要比输出的大。因而这个例题代表了自激振荡的一种类型，其振幅将继续增大。

从位置 2 到位置 3 弹簧力所做的功是

$$-\frac{1}{2}k[(x_0 + \Delta x) + (x_0 - 2x)](2x + \Delta x)$$

从位置 2 到位置 3 摩擦力所做的功是

$$\mu_{kr} mg(2x + \Delta x)$$

自位置 2 和位置 3 之间所做的净功相等，所以转变为动能的

功是零，

$$-\frac{1}{2}k(2x_0-2x+\Delta x)+\mu_{kr}mg=0 \qquad (c)$$

将（a）式和（b）式代入（c）式，求出每振荡一周振幅的增量为

$$\Delta x=\frac{2g(\mu_{kr}-\mu_{kl})}{\omega_n^2} \qquad (d)$$

11.12 适用于非线性系统的模拟计算机回路

许多非线性系统可以应用电子模拟计算机进行研究。在本节中介绍若干与非线性系统有关的回路图，并简要讨论它们的工作原理。

迟滞阻尼系统 图 11.12-1 示出了弹簧力引起迟滞阻尼的典型变化并示出了由柯海（T.K.Caughey）●提出的积分器回路，该回路是采用若干二极管来限制输出电压。该回路以下面的方式工

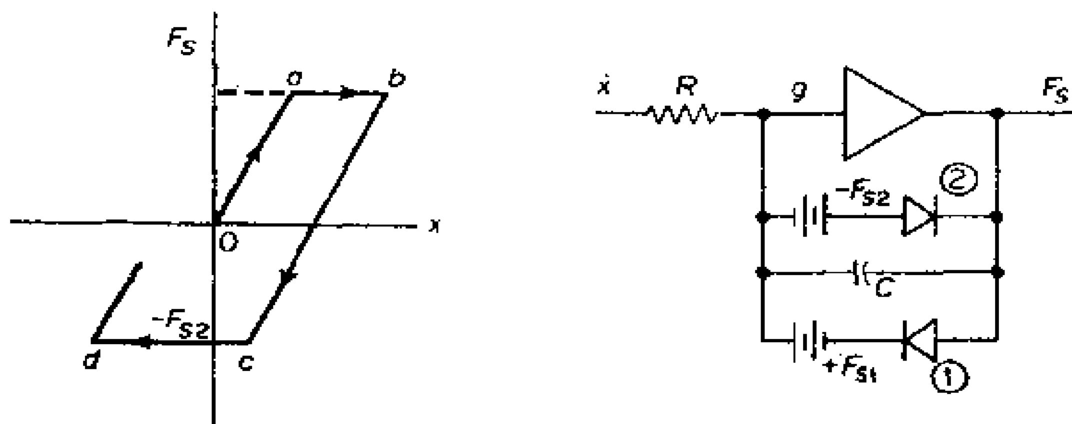


图 11.12-1 双线性滞后

作。假设电容器C两端间的电压起始为零，我们施加一正电压$\dot{x}$到输入端。该回路是一积分器，其输出电压是按下列方程开始逐步建立

● 见参考文献 4。

$$F_s = \frac{1}{RC}\int_0^t \dot{x}dt = kx$$

注意，栅极 g 的电势本来就是零，所以电容器 C 两端间的电压为零。在此期间，二极管②不能导通，所以电路②呈开路。二极管①只有当它的从输出边来的电压超过偏电压 $+F_{s1}$ 时才能导通，偏电压 $+F_{s1}$ 被调节到与力位移曲线上 a 点等位。当二极管①导通时，电容器 C 两端间的电压限制在 $+F_{s1}$ 直到 $\dot{x}$ 在 b 点变为负值，该时二极管①变成不通，回路出现象只有电容器 C 跨在放大器二端。当输出电压达到由 C 点的 $-F_{s2}$ 调节的某负值时，二极管②导通且在电容器 C 上限制负电压，直到速度 $\dot{x}$ 在 d 点重新变为正值。

图 11.12-2 示出了有限积分器是如何组成解下列方程的回路的

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + F_s = F(t) \qquad (11.12\text{-}1)$$

依靠引入一附加电容器 C_2（用点线表示），就能给刚度曲线中的 ab 线和 cd 线以一非零斜率。

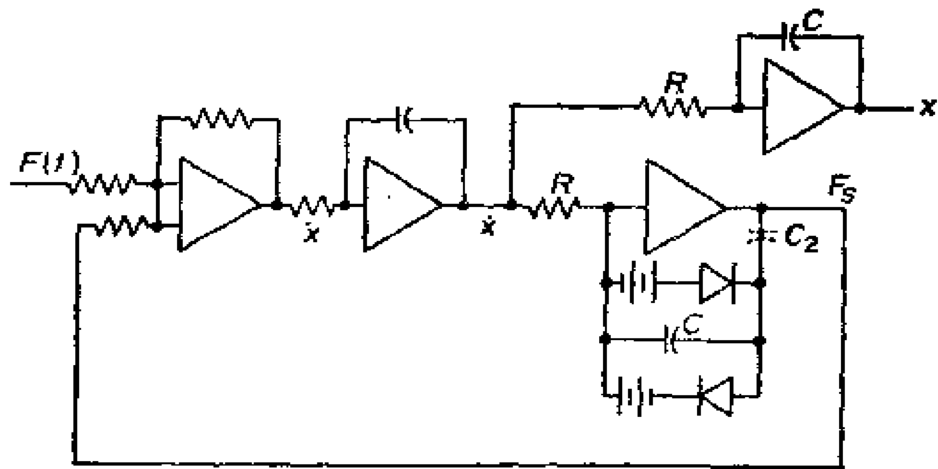


图 11.12-2　用以解方程11.12-1的电路

11.13　龙格-库塔法

在第四章和第八章中讨论过的龙格-库塔法可用来解非线性

微分方程。我们研究下列非线性方程

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+0.4\frac{dx}{d\tau}+x+0.5x^3=0.5\cos(0.5\tau) \qquad (11.13\text{-}1)$$

令$y=dx/d\tau$将上述方程改写为下列一阶形式

$$\frac{dy}{d\tau}=0.5\cos(0.5\tau)-x-0.5x^3-0.4y=F(\tau,x,y)$$

上述计算方程可用来按下列次序编写适用于数字计算机的程序。

τ	x	y	F
$t_1=\tau_1$	$k_1=x_1$	$g_1=y_1$	$f_1=F(t_1,k_1,g_1)$
$t_2=\tau_1+h/2$	$k_2=x_1+g_1h/2$	$g_2=y_1+f_1h/2$	$f_2=F(t_2,k_2,g_2)$
$t_3=\tau_1+h/2$	$k_3=x_1+g_2h/2$	$g_3=y_1+f_2h/2$	$f_3=F(t_3,k_3,g_3)$
$t_4=\tau_1+h$	$k_4=x_1+g_3h$	$g_4=y_1+f_3h$	$f_4=F(t_4,k_4,g_4)$

根据这些计算结果可用下列循环方程式确定 x 和 y 值，

$$x_{i+1}=x_i+\frac{h}{6}(g_1+2g_2+2g_3+g_4) \qquad (11.13\text{-}2)$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}(f_1+2f_2+2f_3+f_4) \qquad (11.13\text{-}3)$$

式中 $h=\Delta t$。

这样，以 $i=1$，x_2和y_2便可找到，再以$\tau_2=\tau_1+\Delta\tau$，前面的 t、k、g 和 f 表可以算出，再代入循环方程式去求x_3和y_3。

龙格-库塔法的误差的阶是$h^5=(\Delta\tau)^5$。而且，这种方法还避免了计算导数的必要性，因而可获得好的精度。

方程(11.13-1)曾采用龙格-库塔程序，取 $h=\Delta\tau=0.1333$，用数字计算机求解。其计算结果由机器绘成相平面上的 y 与 x 的函数关系曲线，如图 11.13-1 所示。很明显地可以看出不到两个循环就可达到极限环。

为了与龙格-库塔法进行对比，也曾按在第4.7节中提出的简单数值计算程序对这个问题进行过试算，其计算结果变成不稳定的，见图11.13-2所示。在第4.7节中提出的数值计算程序中误差

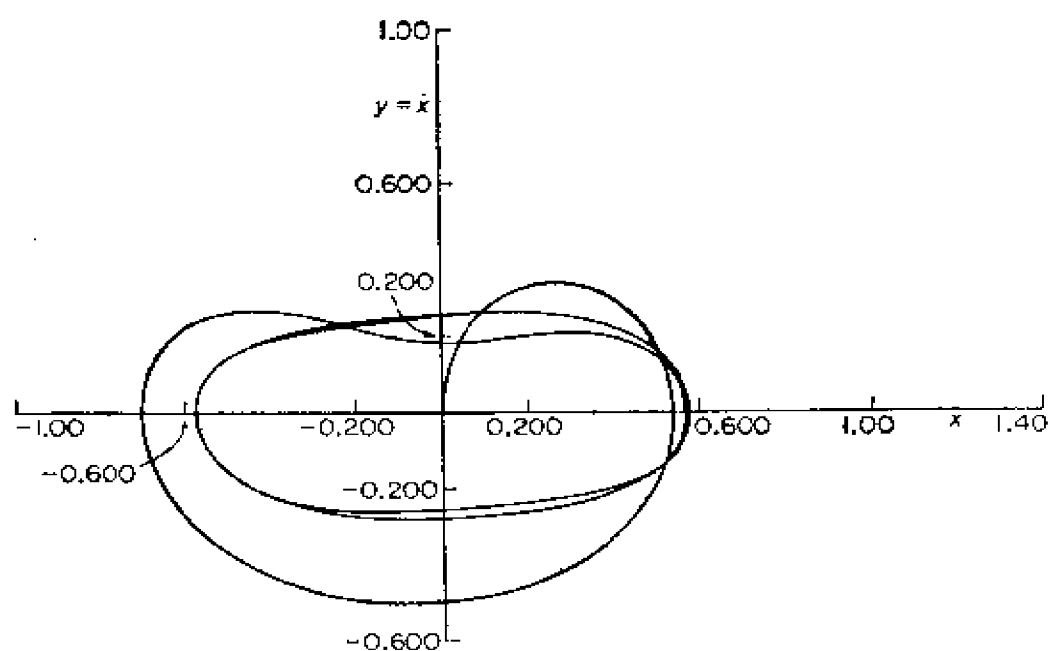


图 11.13-1 非线性微分方程的龙格-库塔解

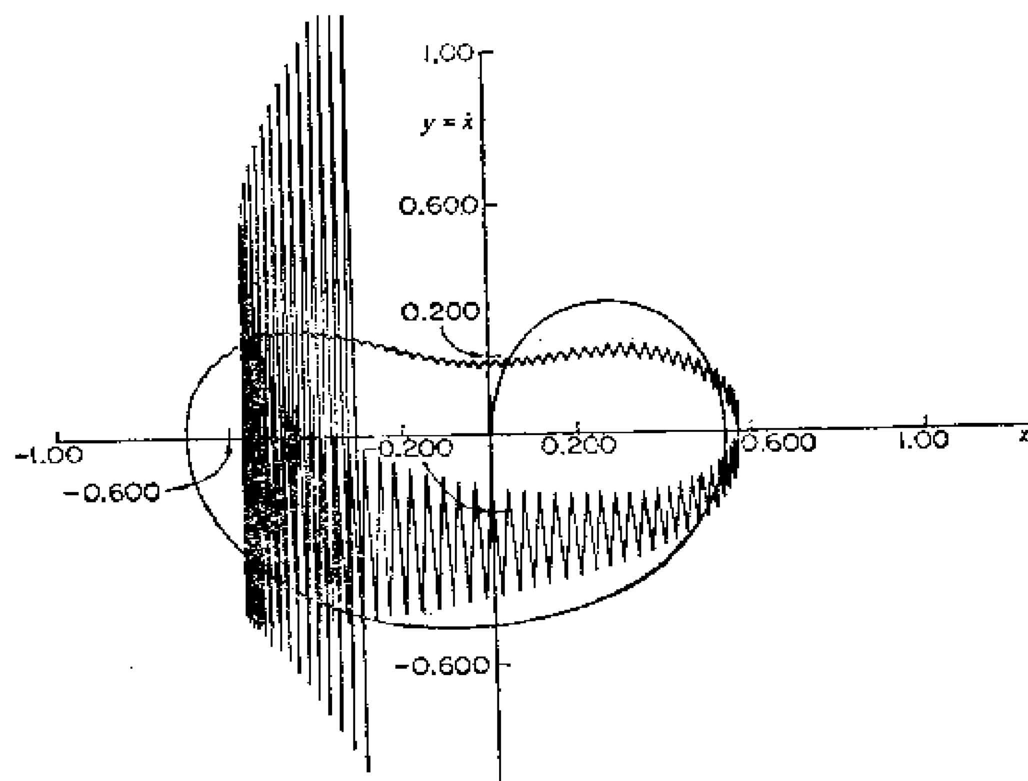


图 11.13-2 非线性微分方程11.13-1的有限差分解

的阶是 $h^3 = (\Delta\tau)^3$，这种误差对于现在研究的这个问题证明是不适当的。

采用数字计算机，曾对$\mu = 0.2$、0.7、1.5、3和4且具有小初始位移的下列范德波尔方程，用龙格-库塔法求解。

$$\ddot{x} - \mu\dot{x}(1 - x^2) + x = 0$$

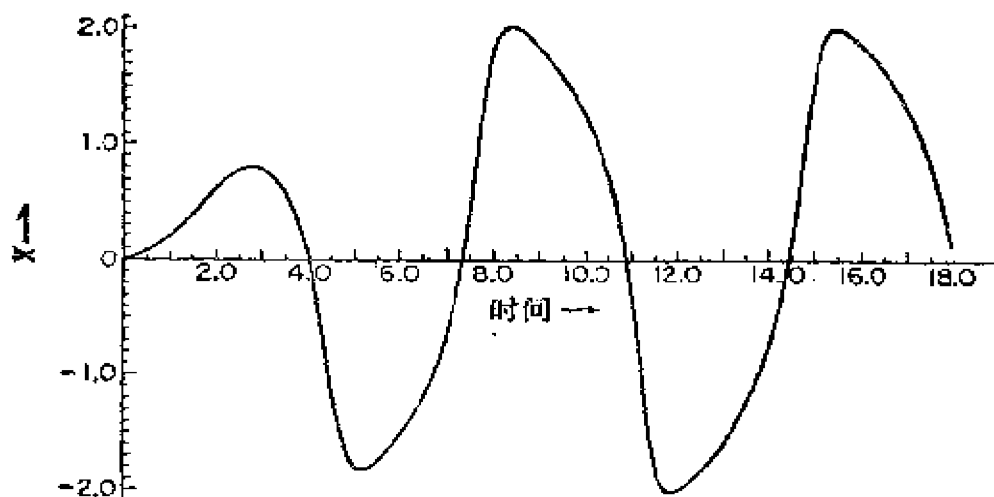


图 11.13-3　范德波尔方程的龙格-库塔解(对$\mu = 1.5$)

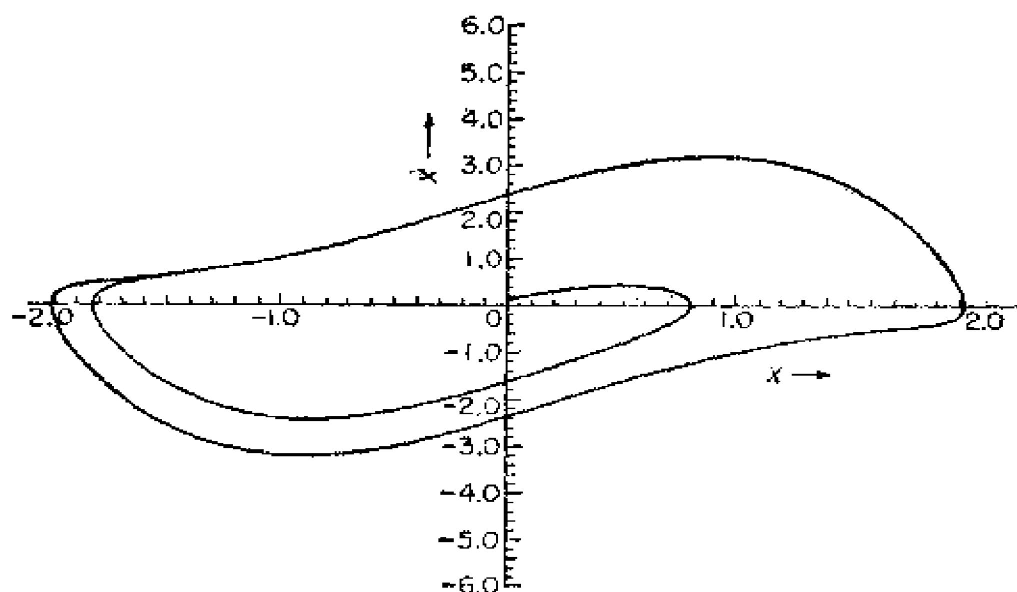


图 11.13-4　范德波尔方程的龙格-库塔解(对$\mu = 1.5$)

相平面和时间图都是自动绘制的。

在$\mu=0.2$情况下，其响应差不多是正弦形，而其相平面图是接近于一椭圆螺线。当$\mu=1.5$时，非线性的效应是十分明显的，见图11.13-3和图11.13-4所示。

习　　题

11-1　用下列非线性方程

$$\ddot{x}+x^3=0$$

证明若$x_1=\varphi_1(t)$和$x_2=\varphi_2(t)$都是满足微分方程的解，但它们的迭加(x_1+x_2)不是解。

11-2　一质量系在长$2l$的细绳中点如图P.11-2所示。设细绳的张力是T，求大变位时的运动微分方程。

11-3　图P.11-3所示为一浮标，它是由二个直径为$2r$，高为h的圆锥体组合而成。一重物系在底部使浮标浮在平衡位置x_0。试建立浮标垂直振荡的运动微分方程。

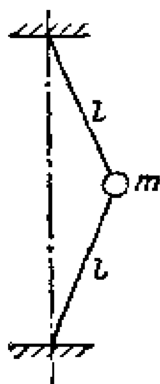


图 P.11-2

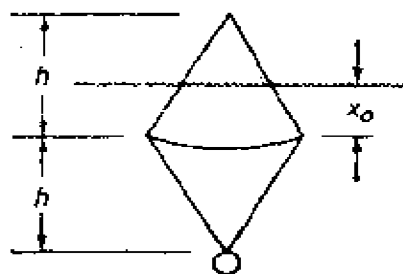


图 P.11-3

11-4　求具有间断刚度弹簧-质量系统的运动微分方程，间断刚度是由图P.11-4中的自由间隙所产生的。

11-5　一单摆索缠在半径为R的固定圆筒上，当摆索位于垂直位置时，索长为l，如图P.11-5所示，求其运动微分方程。

11-6　绘制无阻尼弹簧-质量系统的相平面轨线，包括势能曲线$U(x)$。结合所绘出的曲线图讨论初始条件。

11-7　用题11-6中的$U(x)$对x的曲线图，从下列方程求周期

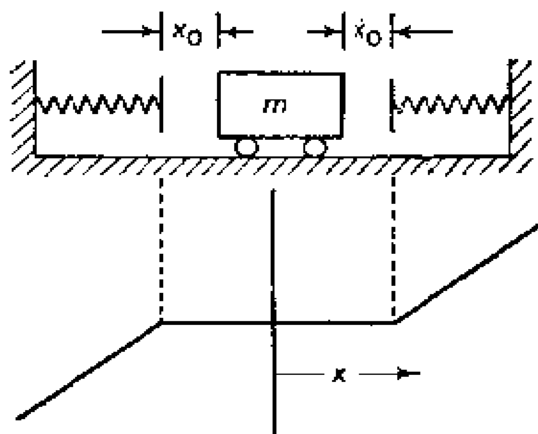


图 P.11-4

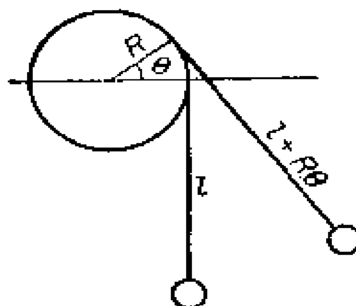


图 P.11-5

$$\tau = 4\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2[E - U(x)]}}$$

(记住：教材中的E是对单位质量而言。)

11-8　对具有初始条件$x(0) = A$和$\dot{x}(0) = 0$的无阻尼弹簧-质量系统，求状态速度V的方程式并说明在什么条件下系统处于平衡状态。

11-9　某线性微分方程的解给出如下

$$x = \cos\pi t + \sin 2\pi t$$

确定$y = \dot{x}$　并绘制一相平面图。

11-10　求下列阻尼弹簧-质量系统

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

的相平面方程。并以$v = y/\omega_n$和x为坐标绘制一条轨线。

11-11　如果一单摆的势能是给定带正号

$$U(\theta) = +\frac{g}{l}\cos\theta$$

确定那些奇异点是稳定的或不稳定的并说明它们的物理意义。将其相平面与图11.5-2进行比较。

11-12　给定势能为$U(x) = 8 - 2\cos \pi x/4$，对$E = 6,7,8,10,12$，分别绘式它们的相平面轨线并对这些曲线加以讨论。

11-13　求下列两个方程式的特征值及特征向量

$$\dot{x} = 5x - y$$
$$\dot{y} = 2x + 2y$$

11-14　求题11-13中方程的变换形式，要求该变换形式能分离成下列形式

$$\xi = \lambda_1 \xi$$
$$\eta = \lambda_2 \eta$$

11-15 当 $\lambda_1/\lambda_2=0.5$和2.0时，分别绘制题 11-14 中 ξ，η 的相平面轨线。

11-16 在题11-15中，当 $\lambda_1/\lambda_2=2.0$时，绘制 y 对 x 的轨线。

11-17 如果题11-14中的 λ_1 和 λ_2 是共轭复数 $-\alpha\pm i\beta$，证明在u，v 平面中的方程式变为

$$\frac{dv}{du}=\frac{\beta u+\alpha v}{\alpha u-\beta v}$$

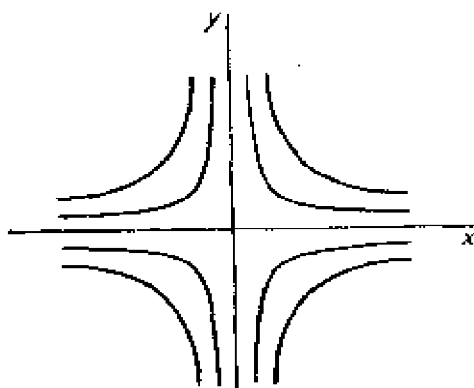
11-18 用变换 $u=\rho\cos\theta$和 $v=\rho\sin\theta$ 来证明题11-17中的相平面方程式变为

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{\alpha}{\beta}\ d\theta$$

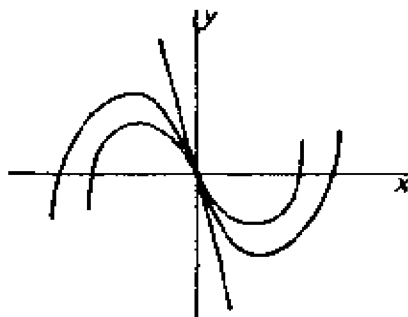
具有与对数螺线相一致的轨线

$$\rho=e^{(\alpha/\beta)\theta}$$

11-19 在 x，y 平面中近奇异点的轨线如图 P.11-19所示。求相平面方程的形式并确定在 ξ-η 平面中相应的轨线。



图P.11-19



图P.11-20

11-20 图P.11-20所示为一过阻尼系统（$\zeta>1$）中一个奇异点附近的相平面轨线。识别相平面方程并在 ξ-η 平面中绘制相应的轨线。

11-21 证明下列方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-y}{x+3y}$$

的解是 $x^2+2xy+3y^2=C$，该解是一族椭圆，这族椭圆的轴线是从 x，y 坐标旋转而来。求半长轴的旋转度并绘出该椭圆族的一个椭圆。

11-22 证明二阶线性微分方程的等倾线是许多直线。

11-23 绘出下列方程的等倾线

$$\frac{dy}{dx}=xy(y-2)$$

11-24 研究下列非线性方程

$$\ddot{x}+\omega_n^2x+\mu x^3=0$$

以$y(dy/dx)$代替$\ddot{x}$，此处$y=\dot{x}$，上述方程的积分变为

$$y^2+\omega_n^2x^2+\frac{1}{2}\mu x^4=2E$$

当 $y=0$，$x=A$时，证明由下式确定的周期是有效的

$$\tau=4\int_0^A\frac{dx}{\sqrt{2[E-U(x)]}}$$

11-25 题11-24中的等倾线象什么？

11-26 绘制下列范德波尔方程的等倾线

$$\ddot{x}-\mu\dot{x}(1-x^2)+x=0$$

当 $\mu=2.0$ 和 $dy/dx=0$，-1及$+1$时。

11-27 具有硬弹簧阻尼系统自由振荡的方程式给定为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx+\mu x^3=0$$

在相平面中以增量法形式表达上述方程式。

11-28 给题11-27中方程式以下列数值：

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}=25,\qquad \frac{c}{m}=2\zeta\omega_n=2.0,\qquad \frac{\mu}{m}=5\ 。$$

当初始条件 $x(0)=4.0$，$\dot{x}(0)=0$ 时，用增量法绘制相平面轨线。

11-29 用增量法绘制单摆的相平面轨线，初始条件为 $\theta(0)=60°$和 $\dot{\theta}(0)=0$。

11-30 求题11-29中单摆的周期并与线性系统的周期进行比较。

11-31 具有常量库仑阻尼的弹簧-质量系统的运动方程可写成如下

$$\ddot{x}+\omega_n^2x+C\,sgn(\dot{x})=0$$

式中$sgn(\dot{x})$表示正号或负号，当$\dot{x}$为正时，$sgn(\dot{x})$表示正号，当$\dot{x}$为负时，$sgn(\dot{x})$表示负号。

将上述方程以适合列纳法的形式表达。

11-32 一带库仑阻尼的系统具有下列数值：$k=3.60$磅/英寸；$m=0.10$磅·秒^2·英寸$^{-1}$；$\mu=0.20$。用列纳法绘制当 $x(0)=20''$，$\dot{x}(0)=0$时的轨线。

11-33 讨论列纳法在带粘滞阻尼的弹簧-质量系统中的应用。

11-34 对带库仑阻尼的弹簧-质量系统，讨论增量法与列纳法的相似性。

11-35 研究带粘滞阻尼的单摆的运动并求其奇异点。借助于图 11.5-2 以及轨线应该螺旋地进入原点的知识，画几条近似轨线草图。

11-36 用斜率线法解带库仑阻尼的弹簧-质量系统问题。

11-37 范德波尔方程可以改写为如方程（11.8-8）那样两个一阶方程，式中

$$g(x)=\mu\left(-x+\frac{1}{3}x^{3}\right)$$

$$h(y)=0$$

用斜率线法，从 $x=0$，$y=-0.05$ 开始，确定上述方程的解。设 $\Delta t=0.20$。

11-38 如果在斜率线法中时间增量 Δt 保持常量，那末位移-时间曲线能容易地画出。从题11-37中的图解画 x 以 t 为函数的曲线。

11-39 在方程(11.8-8)中，当 $g(x)=c$ 和 $h(y)=ky$ 时，式中 c 和 k 都是常量，证明等效二阶方程是

$$\ddot{x}+k\dot{x}+x+kc=0$$

11-40 以 $\theta-\frac{1}{6}\theta^{3}$ 代替 $\sin\theta$，把摄动法应用于单摆。只取 x 级数和 ω 级数中的前两项。

11-41 根据摄动法，作为振幅函数的单摆周期方程式是什么。

11-42 对一给定系统，方程(11.10-7)中的数值给定为

$$\ddot{x}+0.15\dot{x}+10x+x^{3}=5\cos(\omega t+\varphi)$$

首先假定一A值并对 ω^{2} 求解，然后从方程（11.10-11）中绘制 A 以 ω 为函数的曲线。

11-43 求题11-42的相角 φ 为 ω 的函数。

11-44 给单摆的支承端一给定运动，如图 P.11-44所示。证明该单摆的运动方程是

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{l}-\frac{\omega^{2}y_{0}}{l}\cdot\cos2\omega t\right)\sin\theta=0$$

11-45 当 g/l 为一给定值时，求题11-44 中单摆的激励频率，该单摆带刚性臂 l 且在垂直位置上是稳定的。

11-46 确定图 P.11-46 所示系统的摄动解并导出麦雪尤方程。采用的初始条

件为：$\dot{x}(0)=0$，$x(0)=A$。

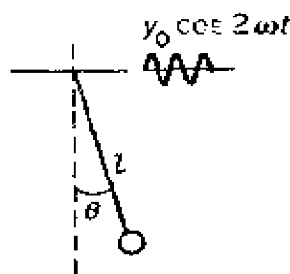


图 P.11-44

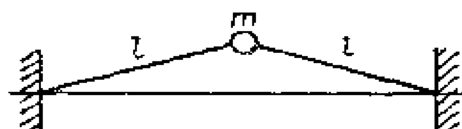


图 P.11-46

11-47 图P.11-47 所示为一弹簧刚性死区的模拟回路。构成模拟计算机电路去解习题11-4。

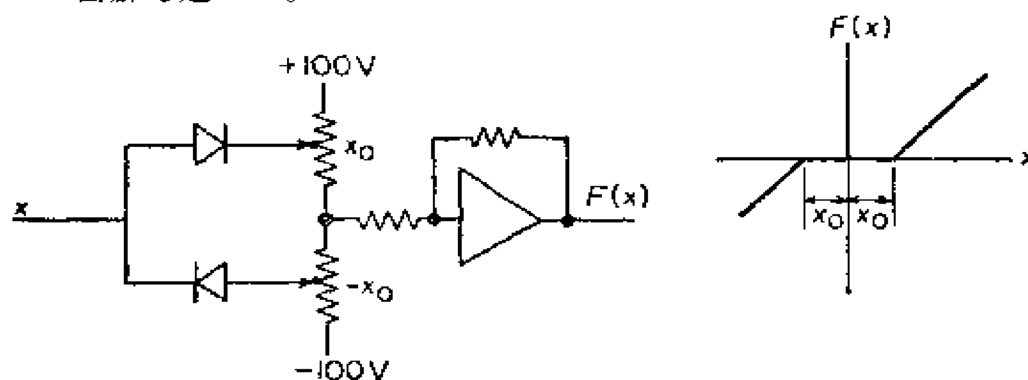


图 P.11-47

参 考 文 献

1. Bellman, R. *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering.* New York: Holt, Rinehart & Winston, Inc., 1964.
2. Brock, J. E. "An Iterative Numerical Method for Nonlinear Vibrations," *Jour. Appl'd. Mech*, (March 1951), pp. 1-11.
3. Butenin, N. V. *Elements of the Theory of Nonlinear Oscillations.* New York: Blaisdell Publishing Co., 1965.
4. Caughey, T. K. "Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis," *Jour. Appl'd. Mech.*, (Dec. 1960), pp. 640-43.
5. Cunningham, W. J. *Introduction to Nonlinear Analysis.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
6. Davis, H. T. *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations.* Washington, D.C.: Govt. Printing Office, 1956.
7. Duffing, G. *Erwugene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz.* Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn, 1918.

8. Hayashi, C. *Forced Oscillations in Nonlinear Systems.* Osaka, Japan: Nippon Printing & Publishing Co., Ltd., 1953.
9. Jacobsen, L. S. "On a General Method of Solving Second Order Ordinary Differential Equations by Phase Plane Displacements." *Jour. Appl'd. Mech.*, (Dec. 1952), pp. 543–53.
10. Malkin, I. G. *Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Books I and II. Washington, D.C.: Dept. of Commerce, 1959.
11. Minorsky, N. *Nonlinear Oscillations.* Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., Inc., 1962.
12. Nishikawa, Y. *A Contribution of the Theory of Nonlinear Oscillations.* Osaka, Japan: Nippon Printing & Publishing Co. Ltd., 1964.
13. Rauscher, M. "Steady Oscillations of Systems with Nonlinear and Unsymmetrical Elasticity." *Jour. Appl'd. Mech.*, (Dec. 1938), pp. A169–77.
14. Stoker, J. J. *Nonlinear Vibrations.* New York: Interscience Publishers, Inc., 1950.

附　　录

A. 复数代数

复数 $z=a+ib$ 可以由图 A-1的矢量图来图解表示，图中的水平轴代表实部，垂直轴代表虚部。数值 $A=\sqrt{a^2+b^2}$ 称为 z 的模，而角 θ 称为 z 的辐角。

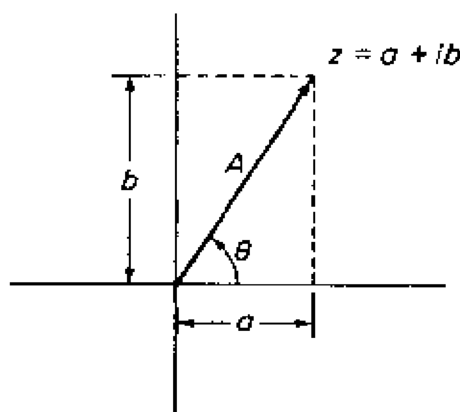


图 A-1　复量 z 的矢量图

复量 z 也可以用欧拉方程

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1}$$

表示为极坐标形式，于是，z 的另一种表达式为：

$$z=Ae^{i\theta}=(A\cos\theta)+i(A\sin\theta) \tag{2}$$

对于模 A 为常数，而幅角 θ 线性正比于时间 t 的这种情况尤为重要，也即 $\theta=\omega t$，其中 ω 为角速率，它也为常数。于是，复量 z 称之为相量。图A-2表示一个相量

$$z_1=Ae^{i\theta}=(A\cos\theta)+i(A\sin\theta) \tag{3}$$

或者表示一个以等角速率 ω 沿着半径为 A 的圆周运动的点。显然，它的分量对时间描绘的曲线必定按正弦变化，即

$$A\cos\theta = Rez \tag{4}$$

$$iA\sin\theta = I_m z \tag{5}$$

相量也可以按负方向旋转，这时，指数为负数

$$z_2 = Ae^{-i\theta} = (A\cos\theta) - i(A\sin\theta) \tag{6}$$

于是，z_2 为 z_1 的共轭复数，或 $z_2 = z_1^*$ 。将 z_1和 z_1^* 相加后除以 2，得到实部

$$Rez = \frac{1}{2}(z_1 + z_1^*) = A\cos\theta \tag{7}$$

同样，由两者差之半得到虚部

$$I_m z = \frac{1}{2}(z_1 - z_1^*) = iA\sin\theta \tag{8}$$

这些运算图示于图 $A-3$

为了将两个不同的相量相加，第二个相量应该以第一个相量为基准。设 $z_1 = A_1 e^{i\omega t}$，$z_2 = A_2 e^{i(\omega t+\phi)}$，如图 $A-4$ 所示。将 z_2分解为平行于 z_1 和垂直于 z_1 的两个分量如下：

$$z_2 = A_2 e^{i\phi} e^{i\omega t} = (A_2\cos\phi + iA_2\sin\phi)e^{i\omega t} \tag{9}$$

与 z_1 相加得

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= [(A_1 + A_2\cos\phi) + i(A_2\sin\phi)]e^{i\omega t} \\ &= A_3 e^{i(\omega t+\alpha)} = (A_3 e^{i\alpha})e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{10}$$

式中

$$A_3 = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\phi)^2 + (A_2\sin\phi)^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{A_2\sin\phi}{A_1 + A_2\cos\phi}$$

当两个不同频率的相量相加时，一个相量对另一个以角速率 $(\omega_1 - \omega_2)$ 相对运动。因此，两个相量的合成量

$$A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$$

将在 $(A_1 + A_2)$ 和$(A_1 - A_2)$两个振幅之间变化。

引用复数以指数形式的乘、除和乘方法则，可以得到相量的其他运算方法。这些运算方法概括如下：

$$z_1 = A_1 e^{i\theta_1}$$

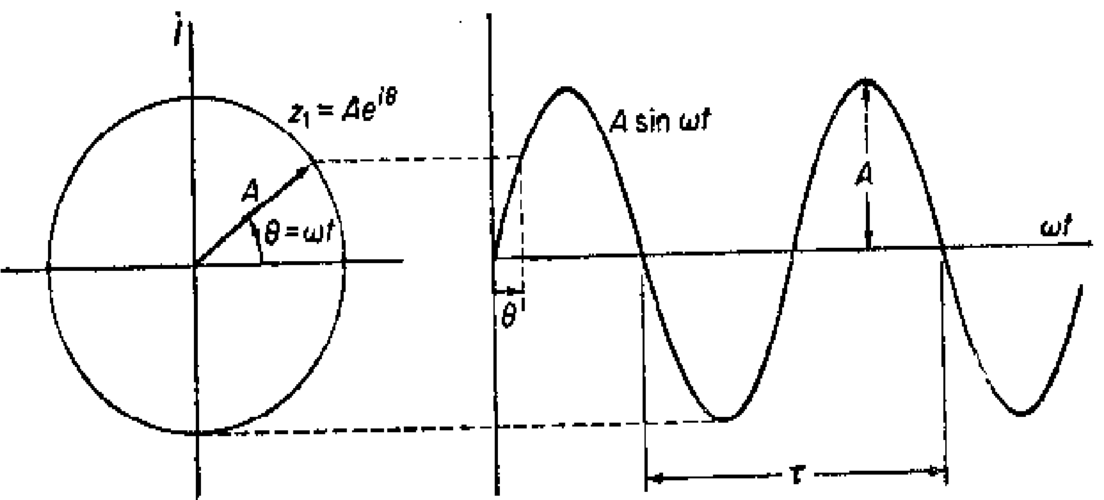


图 A-2 作为相量的分量的谐运动

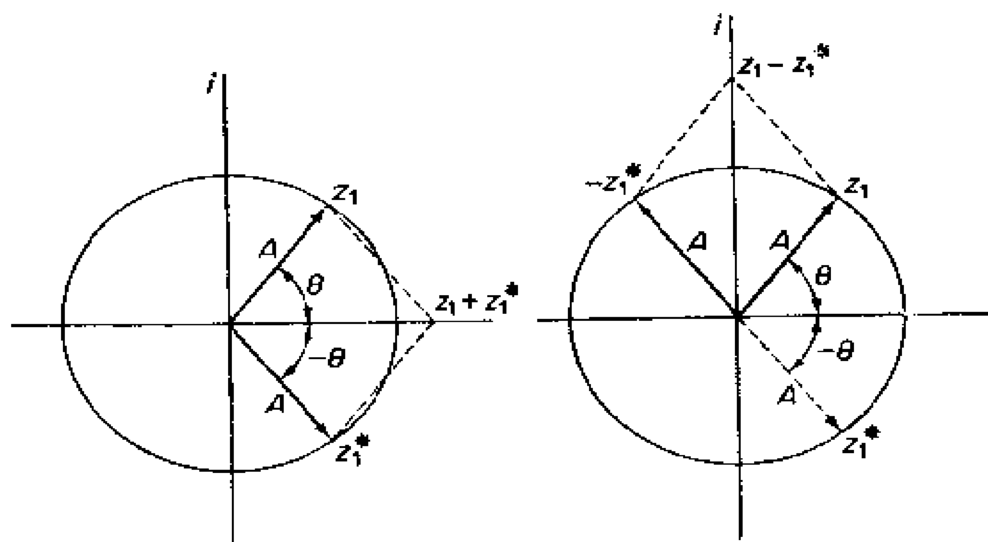


图 A-3　用 z_1 和 z_1^* 表示的实部和虚部

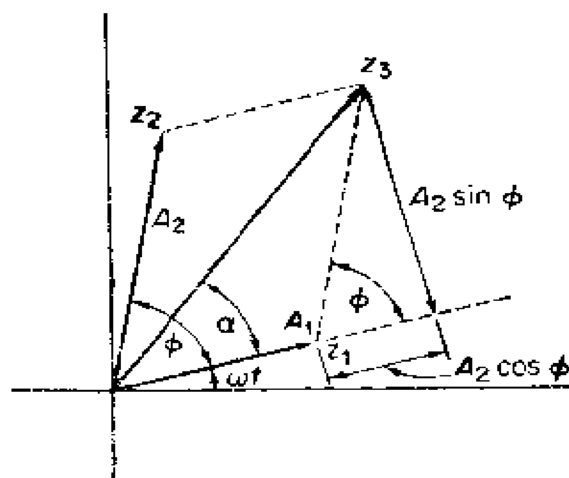


图 A-4　两个相量相加

$$z_2 = A_2 e^{i\theta_2}$$

乘法

$$z_1 z_2 = A_1 A_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{11}$$

除法

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{12}$$

乘方

$$(z_1)^n = A_1^n e^{in\theta} \tag{13}$$

$$z_1^{1/n} = A_1^{1/n} e^{i\theta/n} \tag{14}$$

B. 拉普拉斯变换简介

定义 若$f(t)$是t的已知函数，且$t>0$，则$f(t)$的拉氏（即拉普拉斯）变换$\overline{f}(s)$由下式定义

$$\overline{f}(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \mathscr{L} f(t) \tag{1}$$

式中，s为复变数。只要$f(t)$在0到∞的时间区间内为t的绝对可积函数，那末对于s大于零的实部，积分存在。

〔例1〕 设$f(t)$在$t>0$时为一常数c，则它的拉氏变换为

$$\mathscr{L} c = \int_0^\infty c e^{-st} dt = -\frac{c e^{-st}}{s}\Big]_0^\infty = \frac{c}{s}$$

上式存在于$R(s)>0$。

〔例2〕 设$f(t)=t$。它的拉氏变换可用分部积分法求得。令

$$u = t \qquad du = dt$$

$$dv = e^{-st}dt \qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

其结果为

$$\mathscr{L} t = -\frac{te^{-st}}{s}\Big]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2} \quad R(s)>0$$

导数的拉氏变换 若$\mathscr{L} f(t) = \overline{f}(s)$存在，式中$f(t)$连续，则当$t\to 0$时，$f(t)$趋向于$f(0)$，且其导数$f'(t)=df(t)/dt$的拉氏变换等于

$$\mathscr{L} f'(t) = s\overline{f}(s) - f(0) \tag{2}$$

上述关系式可用分部积分法求得

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= -f(0) + s\overline{f}(s)$$

同样，二阶导数的拉氏变换可表示为

$$\mathscr{L} f''(t) = s^2 \overline{f}(s) - sf(0) - f'(0) \tag{3}$$

移位定理

试研究函数 $e^{at}x(t)$的拉氏变换。

$$\mathscr{L} e^{at}x(t) = \int_0^\infty e^{-st}[e^{at}x(t)]dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}x(t)dt$$

从上式我们得到

$$\mathscr{L} e^{at}x(t) = \overline{x}(s-a) \tag{4}$$

式中，$\mathscr{L} x(t) = \overline{x}(s)$。因此，$x(t)$ 乘以 e^{at} 使变换移过 a， a 可以是任意实数或复数。

常微分方程的变换

试研究微分方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{5}$$

它的拉氏变换为

$$m[s^2\overline{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + c[s\overline{x}(s) - x(0)] + k\overline{x}(s) = \overline{F}(s)$$

改写为

$$\overline{x}(s) = \frac{\overline{F}(s)}{ms^2 + cs + k} + \frac{(ms+c)x(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + cs + k} \tag{6}$$

上式称为微分方程的辅助方程。响应 $x(t)$由反变换求得，第一项表示强迫响应，第二项表示初始条件引起的响应。

更为普遍的情况下，辅助方程可以写成如下形式

$$\overline{x}(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \tag{7}$$

式中，$A(s)$和$B(s)$为多项式。$B(s)$的阶数一般高于$A(s)$。

具有单极点的变换

若辅助方程为

$$\overline{x}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

试研究$B(s)$可以分解为 n 个异根（单极点）a_k的因子的情况：

$$B(s) = (s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)$$

于是，辅助方程可展开为下列部分分式

$$\bar{x}(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{C_1}{s-a_1}+\frac{C_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-a_n} \tag{8}$$

为了确定常数 C_k，我们将上述方程的两边各乘以 $(s-a_k)$，并令 $s=a_k$。于是，右边各项除 C_k 外都为零，我们就得到

$$C_k=\lim_{s\to a_k}(s-a_k)\frac{A(s)}{B(s)} \tag{9}$$

因为 $\mathscr{L}^{-1}C_k/(s-a_k)=C_ke^{a_kt}$，所以 $\bar{x}(s)$ 的逆变换就成为

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{s\to a_k}(s-a_k)\frac{A(s)}{B(s)}e^{a_kt} \tag{10}$$

注意到

$$B(s)=(s-a_k)B_1(s)$$

$$B'(s)=(s-a_k)B'_1(s)+B_1(s)$$

$$\lim_{s\to a_k}B'(s)=B_1(a_k)$$

又因为 $(s-a_k)A(s)/B(s)=A(s)/B_1(s)$，所以，上述 $x(t)$ 的表达式显然可改写成另一种形式

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(a_k)}{B'(a_k)}e^{a_kt} \tag{11}$$

具有高阶极点的变换

若辅助方程

$$\bar{x}(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$$

的 $B(s)$ 中有一个因子重复 m 次，我们就说 $\bar{x}(s)$ 具有一个 m 阶极点。假设有一个 m 阶极点存在于 a_1，则 $B(s)$ 将具有下列形式

$$B(s)=(s-a_1)^m(s-a_2)(s-a_3)\cdots$$

于是，$\bar{x}(s)$ 的部分分式展开式成为

$$\bar{x}(s)=\frac{C_{11}}{(s-a_1)^m}+\frac{C_{12}}{(s-a_1)^{m-1}}+\cdots$$

$$+\frac{C_{1m}}{(s-a_1)}+\frac{C_2}{(s-a_2)}+\frac{C_3}{(s-a_3)}+\cdots \tag{12}$$

方程两边都乘以$(s-a_1)^m$，并令$s=a_1$，就可求出系数C_{11}

$$(s-a_1)^m\bar{x}(s)=C_{11}+(s-a_1)C_{12}+\cdots$$

$$+(s-a_1)^{m-1}C_{1m}+\frac{(s-a_1)^m}{(s-a_2)}C_2+\cdots$$

$$\therefore\quad C_{11}=[(s-a_1)^m\bar{x}(s)]_{s=a_1} \tag{13}$$

将 $(s-a_1)^m\bar{x}(s)$的方程对 s 求导，并令$s=a_1$，就可求得系数 C_{12}

$$C_{12}=\left[\frac{d}{ds}(s-a_1)^m\bar{x}(s)\right]_{s=a_1} \tag{14}$$

因此，显然

$$C_{1n}=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s-a_1)^m\bar{x}(s)\right]_{s=a_1} \tag{15}$$

其它系数C_2，C_3等等可按上节单极点方法求得。

由于使用移位定理

$$\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{(s-a_1)^n}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}a_1t$$

$\bar{x}(s)$的逆变换可成为

$$x(t)=\left[C_{11}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+C_{12}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+\cdots\right]e^{a_1t}+$$

$$+C_2e^{a_2t}+C_3e^{a_3t}+\cdots \tag{16}$$

大部分常微分方程都可以用拉氏变换的基本原理解出。下面表格列出了简单函数的拉氏变换。这个表格也可用于确定拉氏逆变换，因为，

如果

$$\mathscr{L}f(t)=\bar{f}(s)$$

则

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\bar{f}(s)$$

拉氏变换简表

	$f(s)$	$f(t)$
(1)	1	$\delta(t)$=单位脉冲，$t=0$时
(2)	$\frac{1}{s}$	$u(t)$=单位阶跃函数，$t=0$时
(3)	$\frac{1}{s^n}(n=1,2,\cdots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
(4)	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
(5)	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
(6)	$\frac{1}{(s+a)^n}(n=1,2,\cdots)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
(7)	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
(8)	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at}+at-1)$
(9)	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
(10)	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
(11)	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin at$
(12)	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh at$
(13)	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$
(14)	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$
(15)	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$
(16)	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin at$
(17)	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
(18)	$\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$	$\frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t$

参 考 文 献

Thomson, W.T. *Laplace Transformation*, 2nd Ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1960.

C. 行列式和矩阵

I 行列式

一个二阶行列式及其数值计算由下列的符号和运算所定义

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

一个 n 阶行列式具有 n 行和 n 列，为了确认其元素的位置，采用下列符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

余子式

元素 a_{ij} 的余子式M_{ij} 是一个由原行列式划去第 i 行和 第 j 列后所构成的行列式。

余因子（即代数余子式）

元素 a_{ij} 的余因子由下列方程定义

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

〔例〕 三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$a_{21}=4$的余子式为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \text{的} M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

它的余因子式为

$$C_{21} = (-1)^{2+1}3 = -3$$

行列式的展开

行列式按任一行或任一列的余因子展开后，它的阶数降一阶。

〔例〕 上例行列式按第二列展开如下

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -10 - 8 = -18$$

行列式的性质

指出行列式的下述性质，但不作证明。

（1）行列式的任何两列或两行互换后，行列式的符号改变。

（2）若行列式有两行或两列相同，则它的值为零

（3）将行列式的任何一行或任何一列乘一常数，加到另一行或另一列，则它的值不变。

Ⅱ 矩阵

矩阵 一个排列成m行和n列的长方形数组称之为矩阵。例如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

是一个 3×4 的矩阵。

方阵 方阵是一种行数和列数相等的矩阵。它属于 $n \times n$ 矩阵，

或 n 阶矩阵。

对称矩阵 一个方阵，它的右上半元素可以由方阵绕对角线翻转而得，则称之为对称矩阵。例如

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=\text{对称矩阵}$$

迹 方阵对角线元素之和称之为迹。对于上述矩阵

$$\text{Trace}A=2+5+1=8$$

奇异矩阵 如果矩阵的行列式为零，这样的矩阵称之为奇异矩阵。

行阵 一个行阵，它的 $m=1$。

$$B=[b_1\ \ b_2\ \ b_3]$$

列阵 一个列阵，它的 $n=1$。

$$C=\begin{Bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{Bmatrix}$$

零矩阵 零矩阵定义为所有元素为零的矩阵。

$$0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

单位矩阵 单位矩阵

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

是一个方阵，它对角线上的元素从左上角到右下角都为 1，而所有其它元素都为零。

对角形矩阵 只存在沿对角线上的元素 a_{ii}，而其它元素都为零的方阵即为对角形矩阵

$$[a_{ii}]=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$$

转置矩阵 矩阵 A 的转置矩阵 A' 为行列互换后的矩阵。例如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

列阵的转置矩阵为行阵

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad X' = [x_1 x_2 x_3]$$

余子式　矩阵A的余子式M_{ij}是由原矩阵的行列式中划去第i行和第j列后所构成的行列式。

$$设 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$则 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} 的 M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

余因子　余因子C_{ij}等于带符号的余子式$(-1)^{i+j}M_{ij}$。从上例

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$$

伴随矩阵　方阵A的伴随矩阵为A的余因子矩阵的转置矩阵。设A的余因子矩阵为

$$[C_{ij}] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

则

$$adjA = 伴随矩阵 A = [C_{ij}]' = [C_{ji}] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

逆矩阵　矩阵A的逆矩阵A^{-1}满足下述关系式

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

正交矩阵　一个正交矩阵A满足下述关系式

$$A'A = AA' = I$$

从逆矩阵的定义显而易见，对于正交矩阵$A' = A^{-1}$。

Ⅲ 矩阵的运算规则

加法　具有同样行数和列数的两个矩阵可以相加，即相应元素相加。

〔例〕

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

乘法　两个矩阵A和B的乘积为另一个矩阵C。

$$AB = C$$

C的元素C_{ij}按下列规则由A的第i行元素乘以B的第j行元素得到：

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$$

〔例〕

$$设\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 0 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} = C$$

即　$$c_{21} = 1 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 3 = 8$$

显然，A的列数必须等于B的行数，或者说，两矩阵必须是可相乘的。我们还要注意$AB \neq BA$。

用一个列阵右乘一个矩阵，其结果为一个列阵。

〔例〕

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 20 \\ 11 \end{Bmatrix}$$

用一行阵（或一个列阵的转置矩阵）左乘一个矩阵，其结果为一个行阵。

〔例〕

$$[1 \quad 3 \quad 2]\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = [8 \quad 18 \quad 13]$$

乘积$AB = C$的转置矩阵为$C' = B'A'$

〔例〕

$$设 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad C' = B'A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

矩阵求逆　设方程组为

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned} \tag{1}$$

它可以用矩阵形式表示为

$$AX = Y \tag{2}$$

用逆矩阵 A^{-1}左乘，我们得到解

$$X = A^{-1}Y \tag{3}$$

我们可以用如下的克莱姆法则确定 A^{-1}，x_1 的解是：

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\left\{ y_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{|A|}\{y_1 C_{11} + y_2 C_{21} + y_3 C_{31}\}$$

式中，$|A|$为系数矩阵A的行列式，C_{11}，C_{21}和C_{31}为相应元素11，21，和31的$|A|$的余因子。将y列相应地代替第二列和第三列，我们也同样能写出x_2和x_3的表达式。于是，整个解可以写成如下的矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

或者

$$\{x\} = \frac{1}{|A|}[C_{ji}]\{y\} = \frac{1}{|A|}[adjA]\{y\}$$

于是，与方程（3）比较，我们得到

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adjA \tag{5}$$

〔例〕 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵

（a） 矩阵A的行列式为$|A| = 3$

（b） A的余因子为

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ 等等$$

（c） 将符号$(-1)^{i+j}$赋予余子式以便构成余因子矩阵：

$$[C_{ij}] = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

（d） 伴随矩阵为余因子矩阵的转置矩阵，即 $[C_{ij}]'=[C_{ji}]$。于是，求得逆矩阵为

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\,A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

（e） 其结果可以校核如下

$$A^{-1}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

应该指出，要逆矩阵存在，行列式 $|A|$ 必定不为零。

求逆矩阵的方程（5）提供了另一种计算行列式的方法。用 A 左乘方程（5）

$$AA^{-1}=\frac{A}{|A|}adjA=I$$

于是我们得到表达式

$$|A|\,I=AadjA \tag{6}$$

积的转置

不作证明地给出下述运算

$$(AB)'=B'A'$$
$$(A+B)'=A'+B' \tag{7}$$

正交变换　如果

$$P^{-1}=P'$$

则矩阵 P 为正交。正交矩阵的行列式等于±1。如果 A = 对称矩阵，则

$$P^{-1}AP=D=P'AP \text{ 为对角形矩阵} \tag{8}$$

如果 A = 对称矩阵，则

$$P'A=AP$$

$$\{x\}'A = A\{x\} \tag{9}$$

分块矩阵

一个矩阵可以用水平线和垂直线划分为子矩阵，如下例所示

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & -1 & -5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} [A] & [B] \\ \hline [C] & [D] \end{array}\right)$$

其子矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$C = [3 \quad -1] \qquad D = [-5]$$

分块矩阵遵循矩阵代数的通常规则，可以相加，相减，和相乘，就象这些子矩阵是一般矩阵的元素那样。于是

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left\{\begin{array}{c} x \\ \hline y \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c} A\{x\} + B\{y\} \\ \hline C\{x\} + D\{y\} \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array}\right)$$

Ⅳ　特征向量的行列式

与特征值 λ_i 相应的特征向量 X_i 可以从特征方程的任何一行的余因子求得。

令三阶系统的 $[A - \lambda_i I]X_i = 0$ 写为

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda_i) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda_i) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \lambda_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_i = 0 \tag{1}$$

其特征方程 $|A - \lambda_i I| = 0$ 写成行列式形式为

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda_i) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda_i) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda_i) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

将行列式按第一行的余因子展开为

$$(a_{11}-\lambda_i)C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}=0 \qquad (3)$$

其次，将行列式的第一行用第二行代替，其它两行不动。由于两行相同，行列式的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{21} & (a_{22}-\lambda_i) & a_{23} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda_i) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda_i) \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

再按第一行的余因子展开，这些余因子与上个行列式的余因子相同。

$$a_{21}C_{11}+(a_{22}-\lambda_i)C_{12}+a_{23}C_{13}=0 \qquad (5)$$

最后，将第三行代替第一行，并按此行列式的第一行展开

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda_i) \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda_i) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda_i) \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

$$a_{31}C_{11}+a_{32}C_{12}+(a_{33}-\lambda_i)C_{13}=0 \qquad (7)$$

现在可以将方程（3）（5）和（7）组合于一个单一的矩阵方程内

$$\begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda_i) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda_i) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda_i) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{Bmatrix} = 0 \qquad (8)$$

比较方程（1）和（8）后得出，特征向量 X_i 可以由 $\lambda=\lambda_i$ 的特征方程的余因子确定。因为，特征向量是相对于归一化坐标而言的，所以余因子列阵可以因乘子 α 而异。

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_i = \alpha \begin{Bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{Bmatrix}$$

也可以不用第一行而用其它任何一行来确定余因子。

V 考勒斯基解法[1]

对矩阵方程

$$[A]\{X\}=\{C\} \qquad (1)$$

用$[A]$的逆矩阵左乘便可解得$\{X\}$

$$\{X\}=[A]^{-1}\{C\}$$

考氏（即考勒斯基——下同）法避免了对矩阵$[A]$求逆的必要性，$\{X\}$的元素可以用代数逐次逼近法求得。

考氏法借助于对原方程的变换，将方程（1）变换成

$$[T]\{X\}=\{k\} \qquad (2)$$

式中（对于 3×3 矩阵）：

$$[T]=\begin{pmatrix}1 & t_{12} & t_{13}\\ 0 & 1 & t_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (3)$$

为一个具有单位对角元素的上三角形矩阵。例如，假定为 3×3 矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & t_{12} & t_{13}\\ 0 & 1 & t_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{Bmatrix}$$

上述方程中的$\{X\}$元素只要用如下的回代法就可以求得

$$x_3=k_3 \quad \therefore \quad x_3=k_3$$

$$x_2+t_{23}x_3=k_2 \quad \therefore \quad x_2=k_2-t_{23}x_3$$

$$x_1+t_{12}x_2+t_{13}x_3=k_1 \quad \therefore \quad x_1=k_1-t_{12}x_2-t_{13}x_3$$

因此，如果$[T]$和$\{k\}$为已知，则方程（1）中的$\{X\}$就可以解得。

为了确定$[T]$和$\{k\}$，对方程（2）的两边各乘一个下三角形矩阵

---

[1] Salvadori and Baron. *Numerical Methods in Engineering*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1952, pp.23-28.

$$[L]=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

于是

$$[L][T]\{X\}=[L]\{k\} \tag{5}$$

为了使这个方程与原方程相等，必须存在如下关系式

$$[A]=[L][T] \tag{6}$$

$$\{C\}=[L]\{k\} \tag{7}$$

将上述方程用它们的元素写出，得到

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}t_{12} & l_{11}t_{13} \\ l_{21} & (l_{21}t_{12}+l_{22}) & (l_{21}t_{13}+l_{22}t_{23}) \\ l_{31} & (l_{31}t_{12}+l_{23}) & (l_{31}t_{13}+l_{32}t_{23}-l_{33}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} l_{11}k_1 \\ l_{21}k_1+l_{22}k_2 \\ l_{31}k_1+l_{32}k_2+l_{33}k_3 \end{Bmatrix}$$

使这些方程中的元素相等，我们就得到

$$a_{11}=l_{11}$$

$$a_{21}=l_{21}$$

$$a_{31}=l_{31}$$

$$a_{12}=l_{11}t_{12} \qquad \therefore \quad t_{12}=\frac{a_{12}}{l_{11}}$$

$$a_{13}=l_{11}t_{13} \qquad \therefore \quad t_{13}=\frac{a_{13}}{l_{11}}$$

$$a_{22}=(l_{21}t_{12}+l_{22}) \qquad \therefore \quad l_{22}=a_{22}-l_{21}t_{12}$$

$$a_{23}=(l_{21}t_{13}+l_{22}t_{23}) \qquad \therefore \quad t_{23}=\frac{1}{l_{22}}(a_{23}-l_{21}t_{13})$$

$$a_{32}=(l_{31}t_{12}+l_{32}) \qquad \therefore \quad l_{32}=a_{32}-l_{31}t_{12}$$

$$a_{33}=(l_{31}t_{13}+l_{32}t_{23}+l_{33}) \qquad \therefore \quad l_{33}=a_{33}-l_{31}t_{13}-l_{32}t_{23}$$

$$c_1=l_{11}k_1 \qquad \therefore \quad k_1=\frac{c_1}{l_{11}}$$

$$c_2 = l_{21}k_1 + l_{22}k_2 \qquad \therefore \quad k_2 = \frac{1}{l_{22}}(c_2 - l_{21}k_1)$$

$$c_3 = l_{31}k_1 + l_{32}k_2 + l_{33}k_3 \qquad \therefore \quad k_3 = \frac{1}{l_{33}}(c_3 - l_{31}k_1 - l_{32}k_2)$$

于是，矩阵〔L〕，〔T〕和｛k｝的元素现在可以根据〔A〕和〔C〕的已知元素得到，而方程（1）可以不用对矩阵〔A〕求逆而解出。

D．均匀梁的主振型

我们假定一根均匀梁的自由振动由欧拉微分方程所决定。

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

为了确定主振型，把如下形式的解

$$y(x,t) = \phi_n(x)e^{i\omega_n t} \tag{2}$$

代入方程（1）得方程

$$\frac{d^4\phi_n(x)}{dx^4} - \beta_n^4\phi_n(x) = 0 \tag{3}$$

式中

$\phi_n(x)$ = 描述第 n 次振型挠度曲线的特征函数

m = 单位长度的质量密度

$\beta_n^4 = m\omega_n^2/EI$

$\omega_n = (\beta_n l)^2\sqrt{EI/ml^4}$ = 第 n 次振型的固有频率

特征函数 $\phi_n(x)$和主振型频率 ω_n取决于边界条件，并且已由杨和费嘉列成表格，这里仅提供其摘要。

参 考 文 献

Young, D. and R. P. Felgar Jr., *Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*. The University of Texas Publication No. 4913, July 1, 1949.

1．固接端–固接端梁

n	$\beta_n l$	$(\beta_n l)^2$	ω_n/ω_1
1	4.7300	22.3733	1.000
2	7.8532	61.6728	2.7565
3	10.9956	120.9034	5.4039

2. 自由端-自由端梁

自由端-自由端梁的固有频率等于固接端-固接端梁的固有频率。自由端-自由端梁的特征函数和固接端-固接端梁的特征函数的关系如下。

自由端-自由端		固接端-固接端
ϕ_n	=	ϕ_n''
ϕ_n'	=	ϕ_n'''
ϕ_n''	=	ϕ_n
ϕ_n'''	=	ϕ_n'

3. 固接端-自由端梁

n	$\beta_n l$	$(\beta_n l)^2$	ω_n/ω_1
1	1.8751	3.5160	1.0000
2	4.6941	22.0345	6.2669
3	7.8548	61.6972	17.5475

4. 固接端-铰接端梁

n	$\beta_n l$	$(\beta_n l)^2$	ω_n/ω_1
1	3.9266	15.4182	1.000
2	7.0686	49.9645	3.2406
3	10.2102	104.2477	6.7613

5. 自由端-铰接端梁

自由端-铰接端梁的固有频率等于固接端-铰接端梁的固有频率。自由端-铰接端梁的特征函数与固接端-铰接端梁的特征函数的关系如下。

自由端-铰接端		固接端-铰接端
ϕ_n	=	ϕ_n''
ϕ_n'	=	ϕ_n'''

$$\phi_n'' = \phi_n$$
$$\phi_n''' = \phi_n'$$

表 1 特征函数及其导数

固接端-固接端梁

第一次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_1	$\phi_1' = \frac{1}{\beta_1}\frac{d\phi_1}{dx}$	$\phi_1'' = \frac{1}{\beta_1^2}\frac{d^2\phi_1}{dx^2}$	$\phi_1''' = \frac{1}{\beta_1^3}\frac{d^3\phi_1}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−1.96500
0.04	0.03358	0.34324	1.62832	−1.96285
0.08	0.12545	0.61624	1.25802	−1.94862
0.12	0.26237	0.81956	0.89234	−1.91254
0.16	0.43126	0.95451	0.53615	−1.84732
0.20	0.61939	1.02342	0.19545	−1.74814
0.24	0.81459	1.02986	−0.12305	−1.61250
0.28	1.00546	0.97870	−0.41240	−1.44017
0.32	1.18168	0.87608	−0.66581	−1.23296
0.36	1.33419	0.72992	−0.87699	−0.99452
0.40	1.45545	0.54723	−1.04050	−0.73007
0.44	1.53962	0.33897	−1.15202	−0.44611
0.48	1.58271	0.11478	−1.20854	−0.15007
0.52	1.58271	−0.11478	−1.20854	0.15007
0.56	1.53962	−0.33897	−1.15202	0.44611
0.60	1.45545	−0.54723	−1.04050	0.73007
0.64	1.33419	−0.72992	−0.87699	0.99452
0.68	1.18168	−0.87608	−0.66581	1.23296
0.72	1.00546	−0.97870	−0.41240	1.44017
0.76	0.81459	−1.02986	−0.12305	1.61250
0.80	0.61939	−1.02342	0.19545	1.74814
0.84	0.43126	−0.95451	0.53615	1.84732
0.88	0.26237	−0.81956	0.89234	1.91254
0.92	0.12545	−0.61624	1.25802	1.94862
0.96	0.03358	−0.34324	1.62832	1.96285
1.00	0.00000	0.00000	2.00000	1.96500

表 1 特征函数及其导数

固接端-固接端梁

第二次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_2	$\phi'_2=\frac{1}{\beta_2}\frac{d\phi_2}{dx}$	$\phi''_2=\frac{1}{\beta_2^2}\frac{d^2\phi_2}{dx^2}$	$\phi'''_2=\frac{1}{\beta_2^3}\frac{d^3\phi_2}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−2.00155
0.04	0.08834	0.52955	1.37202	−1.99205
0.08	0.31214	0.86296	0.75386	−1.93186
0.12	0.61058	1.00644	0.16713	−1.78813
0.16	0.92602	0.97427	−0.35923	−1.54652
0.20	1.20674	0.79030	−0.79450	−1.21002
0.24	1.41005	0.48755	−1.11133	−0.79651
0.28	1.50485	0.10660	−1.28991	−0.33555
0.32	1.47357	−0.30736	−1.32106	0.13566
0.36	1.31314	−0.70819	−1.20786	0.57665
0.40	1.03457	−1.05271	−0.96605	0.94823
0.44	0.66150	−1.30448	−0.62296	1.21670
0.48	0.22751	−1.43728	−0.21508	1.35744
0.52	−0.22751	−1.43728	0.21508	1.35744
0.56	−0.66150	−1.30448	0.62296	1.21670
0.60	−1.03457	−1.05271	0.96605	0.94823
0.64	−1.31314	−0.70819	1.20786	0.57665
0.68	−1.47357	−0.30736	1.32106	0.13566
0.72	−1.50485	0.10660	1.28991	−0.33555
0.76	−1.41005	0.48755	1.11133	−0.79651
0.80	−1.20674	0.79030	0.79450	−1.21002
0.84	−0.92602	0.97427	0.35923	−1.54652
0.88	−0.61058	1.00644	−0.16713	−1.78813
0.92	−0.31214	0.86296	−0.75386	−1.93186
0.96	−0.08834	0.52955	−1.37202	−1.99205
1.00	0.00000	0.00000	−2.00000	−2.00155

表 1 特征函数及其导数

固接端-固接端梁

第三次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_3	$\phi_3' = \frac{1}{\beta_3}\frac{d\phi_3}{dx}$	$\phi_3'' = \frac{1}{\beta_3^2}\frac{d^2\phi_3}{dx^2}$	$\phi_3''' = \frac{1}{\beta_3^3}\frac{d^3\phi_3}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−1.99993
0.04	0.16510	0.68646	1.12323	−1.97469
0.08	0.54804	0.99303	0.28189	−1.82280
0.12	0.98720	0.95006	−0.45252	−1.48447
0.16	1.34190	0.62285	−0.99738	−0.96698
0.20	1.50782	0.11050	−1.28572	−0.33199
0.24	1.42971	−0.46573	−1.28637	0.32333
0.28	1.10719	−0.98087	−1.01443	0.88956
0.32	0.59186	−1.32694	−0.53145	1.26880
0.36	−0.02445	−1.43171	0.06438	1.39529
0.40	−0.62837	−1.27099	0.65569	1.24912
0.44	−1.10739	−0.87257	1.12747	0.86096
0.48	−1.37174	−0.31031	1.38852	0.30669
0.52	−1.37174	0.31031	1.38852	−0.30669
0.56	−1.10739	0.87257	1.12747	−0.86096
0.60	−0.62837	1.27099	0.65569	−1.24912
0.64	−0.02445	1.43171	0.06438	−1.39529
0.68	0.59186	1.32694	−0.53145	−1.26880
0.72	1.10719	0.98087	−1.01443	−0.88956
0.76	1.42971	0.46573	−1.28637	−0.32333
0.80	1.50782	−0.11050	−1.28572	0.33199
0.84	1.34190	−0.62285	−0.99738	0.96698
0.88	0.98720	−0.95006	−0.45252	1.48447
0.92	0.54804	−0.99303	0.28189	1.82280
0.96	0.16510	−0.68646	1.12323	1.97469
1.00	0.00000	0.00000	2.00000	1.99993

表 2 特征函数及其导数

固接端-自由端梁

第一次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_1	$\phi_1' = \frac{1}{\beta_1}\frac{d\phi_1}{dx}$	$\phi_1'' = \frac{1}{\beta_1^2}\frac{d^2\phi_1}{dx^2}$	$\phi_1''' = \frac{1}{\beta_1^3}\frac{d^3\phi_1}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−1.46819
0.04	0.00552	0.14588	1.88988	−1.46805
0.08	0.02168	0.28350	1.77980	−1.46710
0.12	0.04784	0.41286	1.66985	−1.46455
0.16	0.08340	0.53400	1.56016	−1.45968
0.20	0.12774	0.64692	1.45096	−1.45182
0.24	0.18024	0.75167	1.34247	−1.44032
0.28	0.24030	0.84832	1.23500	−1.42459
0.32	0.30730	0.93696	1.12889	−1.40410
0.36	0.38065	1.01771	1.02451	−1.37834
0.40	0.45977	1.09070	0.92227	−1.34685
0.44	0.54408	1.15612	0.82262	−1.30924
0.48	0.63301	1.21418	0.72603	−1.26512
0.52	0.72603	1.26512	0.63301	−1.21418
0.56	0.82262	1.30924	0.54408	−1.15612
0.60	0.92227	1.34685	0.45977	−1.09070
0.64	1.02451	1.37834	0.38065	−1.01771
0.68	1.12889	1.40410	0.30730	−0.93696
0.72	1.23500	1.42459	0.24030	−0.84832
0.76	1.34247	1.44032	0.18024	−0.75167
0.80	1.45096	1.45182	0.12774	−0.64692
0.84	1.56016	1.45968	0.08340	−0.53400
0.88	1.66985	1.46455	0.04784	−0.41286
0.92	1.77980	1.46710	0.02168	−0.28350
0.96	1.88988	1.46805	0.00552	−0.14588
1.00	2.00000	1.46819	0.00000	0.00000

表 2 特征函数及其导数

固接端-自由端梁

第二次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_2	$\phi_2' = \frac{1}{\beta_2}\frac{d\phi_2}{dx}$	$\phi_2'' = \frac{1}{\beta_2^2}\frac{d^2\phi_2}{dx^2}$	$\phi_2''' = \frac{1}{\beta_2^3}\frac{d^3\phi_2}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−2.03693
0.04	0.03301	0.33962	1.61764	−2.03483
0.08	0.12305	0.60754	1.23660	−2.02097
0.12	0.25670	0.80428	0.86004	−1.98590
0.16	0.42070	0.93108	0.49261	−1.92267
0.20	0.60211	0.99020	0.14007	−1.82682
0.24	0.78852	0.98502	−0.19123	−1.69625
0.28	0.96827	0.92013	−0.49475	−1.53113
0.32	1.13068	0.80136	−0.76419	−1.33373
0.36	1.26626	0.63565	−0.99384	−1.10821
0.40	1.36694	0.43094	−1.17895	−0.86040
0.44	1.42619	0.19593	−1.31600	−0.59748
0.48	1.43920	−0.06012	−1.40289	−0.32772
0.52	1.40289	−0.32772	−1.43920	−0.06012
0.56	1.31600	−0.59748	−1.42619	0.19593
0.60	1.17895	−0.86040	−1.36694	0.43094
0.64	0.99384	−1.10821	−1.26626	0.63565
0.68	0.76419	−1.33373	−1.13068	0.80136
0.72	0.49475	−1.53113	−0.96827	0.92013
0.76	0.19123	−1.69625	−0.78852	0.98502
0.80	−0.14007	−1.82682	−0.60211	0.99020
0.84	−0.49261	−1.92267	−0.42070	0.93108
0.88	−0.86004	−1.98590	−0.25670	0.80428
0.92	−1.23660	−2.02097	−0.12305	0.60754
0.96	−1.61764	−2.03483	−0.03301	0.33962
1.00	−2.00000	−2.03693	0.00000	0.00000

表 2 特征函数及其导数

固接端-自由端梁

第三次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_3	$\phi_3' = \frac{1}{\beta_3}\frac{d\phi_3}{dx}$	$\phi_3'' = \frac{1}{\beta_3^2}\frac{d^2\phi_3}{dx^2}$	$\phi_3''' = \frac{1}{\beta_3^3}\frac{d^3\phi_3}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−1.99845
0.04	0.08839	0.52979	1.37287	−1.98892
0.08	0.31238	0.86367	0.75558	−1.92871
0.12	0.61120	1.00785	0.16974	−1.78480
0.16	0.92728	0.97665	−0.35563	−1.54286
0.20	1.20901	0.79394	−0.78975	−1.20575
0.24	1.41376	0.49285	−1.10515	−0.79124
0.28	1.51056	0.11405	−1.28189	−0.32872
0.32	1.48203	−0.29711	−1.31055	0.14479
0.36	1.32534	−0.69422	−1.19398	0.58908
0.40	1.05185	−1.03374	−0.94753	0.96533
0.44	0.68568	−1.27881	−0.59802	1.24030
0.48	0.26103	−1.40247	−0.18130	1.39004
0.52	−0.18130	−1.39004	0.26103	1.40247
0.56	−0.59802	−1.24030	0.68568	1.27881
0.60	−0.94753	−0.96533	1.05185	1.03374
0.64	−1.19398	−0.58908	1.32534	0.69422
0.68	−1.31055	−0.14479	1.48203	0.29711
0.72	−1.28189	0.32872	1.51056	−0.11405
0.76	−1.10515	0.79124	1.41376	−0.49285
0.80	−0.78975	1.20575	1.20901	−0.79394
0.84	−0.35563	1.54236	0.92728	−0.97665
0.88	0.16974	1.78480	0.61120	−1.00785
0.92	0.75558	1.92871	0.31238	−0.86367
0.96	1.37287	1.98892	0.08829	−0.52979
1.00	2.00000	1.99845	0.00000	0.00000

表 3 特征函数及其导数

固接端-铰接端梁

第一次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_1	$\phi_1' = \frac{1}{\beta_1}\frac{d\phi_1}{dx}$	$\phi_1'' = \frac{1}{\beta_1^2}\frac{d^2\phi_1}{dx^2}$	$\phi_1''' = \frac{1}{\beta_1^3}\frac{d^3\phi_1}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−2.00155
0.04	0.02338	0.28944	1.68568	−2.00031
0.08	0.08834	0.52955	1.37202	−1.99203
0.12	0.18715	0.72055	1.06060	−1.97079
0.16	0.31214	0.86296	0.75386	−1.93187
0.20	0.45574	0.95776	0.45486	−1.87177
0.24	0.61058	1.00643	0.16712	−1.78812
0.28	0.76958	1.01105	−0.10554	−1.67975
0.32	0.92601	0.97427	−0.35923	−1.54652
0.36	1.07363	0.89940	−0.59009	−1.38932
0.40	1.20675	0.79029	−0.79450	−1.21002
0.44	1.32032	0.65138	−0.96918	−1.01128
0.48	1.41006	0.48755	−1.11133	−0.79652
0.52	1.47245	0.30410	−1.21875	−0.56977
0.56	1.50485	0.10661	−1.28992	−0.33555
0.60	1.50550	−0.09916	−1.32402	−0.09872
0.64	1.47357	−0.30736	−1.32106	0.13566
0.68	1.40913	−0.51224	−1.28180	0.36247
0.72	1.31313	−0.70820	−1.20786	0.57666
0.76	1.18741	−0.88996	−1.10157	0.77340
0.80	1.03457	−1.05270	−0.96606	0.94823
0.84	0.85795	−1.19210	−0.80507	1.09714
0.88	0.66151	−1.30448	−0.62295	1.21670
0.92	0.44974	−1.38693	−0.42455	1.30414
0.96	0.22752	−1.43727	−0.21507	1.35743
1.00	0.00000	−1.45420	0.00000	1.37533

表 3 特征函数及其导数

固接端-铰接端梁

第二次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_2	$\phi_2' = \frac{1}{\beta_2}\frac{d\phi_2}{dx}$	$\phi_2'' = \frac{1}{\beta_2^2}\frac{d^2\phi_2}{dx^2}$	$\phi_2''' = \frac{1}{\beta_2^3}\frac{d^3\phi_2}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−2.00000
0.04	0.07241	0.48557	1.43502	−1.99300
0.08	0.25958	0.81207	0.87658	−1.94824
0.12	0.51697	0.98325	0.33937	−1.83960
0.16	0.80176	1.00789	−0.15633	−1.65333
0.20	1.07449	0.90088	−0.58802	−1.38736
0.24	1.30078	0.68345	−0.93412	−1.05012
0.28	1.45308	0.38242	−1.17673	−0.65879
0.32	1.51208	0.02894	−1.30380	−0.23724
0.36	1.46765	−0.34350	−1.31068	0.18649
0.40	1.31923	−0.70122	−1.20092	0.58286
0.44	1.07550	−1.01270	−0.98634	0.92349
0.48	0.75348	−1.25090	−0.68631	1.18364
0.52	0.37700	−1.39515	−0.32640	1.34442
0.56	−0.02536	−1.43265	0.06348	1.39438
0.60	−0.42268	−1.35944	0.45136	1.33056
0.64	−0.78413	−1.18058	0.80569	1.15876
0.68	−1.08158	−0.90972	1.09776	0.89319
0.72	−1.29186	−0.56793	1.30395	0.55537
0.76	−1.39858	−0.18205	1.40755	0.17245
0.80	−1.39351	0.21752	1.40010	−0.22494
0.84	−1.27726	0.59923	1.28198	−0.60506
0.88	−1.05919	0.93288	1.06244	−0.93759
0.92	−0.75676	1.19208	0.75879	−1.19604
0.96	−0.39406	1.35629	0.39504	−1.35983
1.00	0.00000	1.41251	0.00000	−1.41592

表 3 特征函数及其导数

固接端-铰接端梁

第三次振型

$\frac{x}{l}$	ϕ_3	$\phi_3' = \frac{1}{\beta_3}\frac{d\phi_3}{dx}$	$\phi_3'' = \frac{1}{\beta_3^2}\frac{d^2\phi_3}{dx^2}$	$\phi_3''' = \frac{1}{\beta_3^3}\frac{d^3\phi_3}{dx^3}$
0.00	0.00000	0.00000	2.00000	−2.00000
0.04	0.14410	0.65020	1.18532	−1.97961
0.08	0.48626	0.97168	0.39742	−1.85535
0.12	0.89584	0.98593	−0.30845	−1.57331
0.16	1.25604	0.74002	−0.86560	−1.13046
0.20	1.47476	0.30725	−1.21523	−0.56678
0.24	1.49419	−0.21934	−1.32168	0.04683
0.28	1.29662	−0.73864	−1.18195	0.62397
0.32	0.90489	−1.15556	−0.82867	1.07934
0.36	0.37703	−1.39512	−0.32637	1.34445
0.40	−0.20439	−1.41364	0.23807	1.37996
0.44	−0.74658	−1.20525	0.76897	1.18287
0.48	−1.16223	−0.80234	1.17711	0.78746
0.52	−1.38422	−0.26994	1.39411	0.26005
0.56	−1.37687	0.30522	1.38344	−0.31179
0.60	−1.14194	0.82907	1.14631	−0.83344
0.64	−0.71844	1.21582	0.72134	−1.21873
0.68	−0.17628	1.40210	0.17821	−1.40403
0.72	0.39519	1.35742	−0.39391	−1.35870
0.76	0.90188	1.08924	−0.90103	−1.09010
0.80	1.26035	0.64175	−1.25980	−0.64233
0.84	1.41160	0.08860	−1.41124	−0.08900
0.88	1.33072	−0.47918	−1.33049	0.47891
0.92	1.03098	−0.96820	−1.03085	0.96800
0.96	0.56168	−1.29798	−0.56162	1.29782
1.00	0.00000	−1.41429	0.00000	1.41414

E. 振动界限的规定

振动的规定常基于谐运动。

$$x = x_0 \sin\omega t$$

于是，速度和加速度可通过求导数求得，而且它们峰值可写成下述关系式。

$$\dot{x}_0 = 2\pi f x_0$$

$$\ddot{x}_0 = -4\pi^2 f^2 x_0 = -2\pi f \dot{x}_0$$

这些方程改写成下列形式后，可以标在双对数纸上

$$\ln\dot{x}_0 = \ln x_0 + \ln 2\pi f$$

$$\ln\dot{x}_0 = -\ln\ddot{x}_0 - \ln 2\pi f$$

令 x_0 = 常数时，$\ln\dot{x}_0$ 对 $\ln 2\pi f$ 的曲线是一条直线，其斜率等于 +1。令 $\ddot{x}_0$ = 常数时，$\ln\dot{x}_0$ 对 $\ln 2\pi f$ 的曲线也是一条直线，其斜率为 −1。这些曲线示于图 E-1。此图常用于规定振动的界限。粗线所示的界限，最大加速度为 10g，最小和最大频率为 5 和500 周/秒，位移上限为0.30英寸。

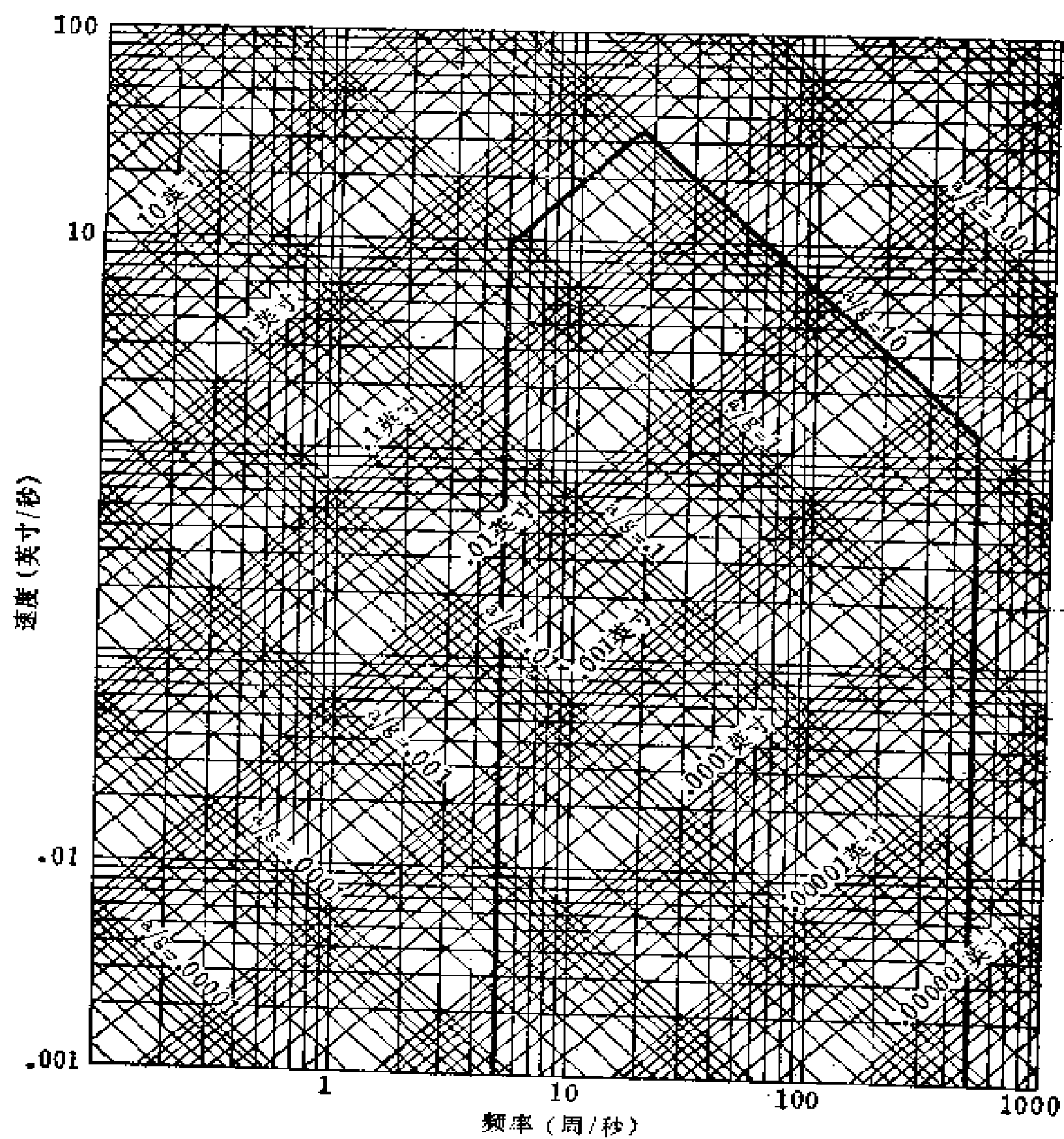


图 E-1

习 题 答 案

第 一 章

1-1 $\dot{x}_{max}=8.38$英寸/秒

$\ddot{x}_{max}=351$英寸/秒^2

1-3 $x_{max}=2.86$英寸，$\tau=0.10$秒，$\ddot{x}_{max}=1130$英寸/秒^2

1-5 $z=5e^{0.6435i}$

1-8 $R=5.76$，$\theta=13°20'$

1-9 $x(t)=4/\pi(\sin\omega t+1/3\sin3\omega t+1/5\sin5\omega t+\cdots)$

1-11 $x(t)=1/2+4/\pi^2(\cos\omega_1t+1/3^2\cos3\omega_1t+1/5^2\cos5\omega_1t+\cdots)$

式中 $\omega_1=2\pi$

1-13 $\sqrt{\overline{x^2}}=A/2$

1-14 $\overline{x^2}=1/3$

1-16 $b_n=\dfrac{1}{n\pi}(1-\cos kn\pi)$，$a_n=\dfrac{1}{n\pi}\sin kn\pi$，$a_0=k$

第 二 章

2-1 5.62周/秒

2-3 0.159秒

2-5 $x=W_2\sqrt{\dfrac{2gh}{k(W_1+W_2)}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{W_1+W_2}}\,t$

2-7 $J_0=9.27$磅英寸·秒^2

2-9 8.0英寸

2-11 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+J_0/r_2}}$

2-13 $\tau=1.98$秒

2-15 $\tau=\dfrac{2\pi L}{a}\sqrt{\dfrac{h}{3g}}$

2-17 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{gab}{k\kappa^2}}$　　$\kappa=$回转半径

2-20 $m_{eff}=(m/n^2)[1/12+(1/2-n)^2]$

2-22 $m_{eff}=0.257(wl/g)$

2-24 $T=1/2[J_1/r_1{}^2+m_0+m_2+J_2/r_2{}^2]$

2-26 $c_{cr}=0.288$

2-27 $\zeta=1.45$

2-29 (a) $\omega_d=27.8$弧度/秒　(b) $\delta=0.0202$

(c) $\zeta=0.00322$　(d) $c=0.00232$

2-32 (a) $c_{cr}=2\frac{1}{a}\sqrt{km}$，　(b) $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$\omega_n=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}$，　$\zeta=\frac{ca}{2l\sqrt{km}}$

2-34 $\zeta=0.00818$

2-38 $x_{max}=5.0$英寸，$t=0.0173$秒

2-39 $\zeta_1=0.59$，$x=0.378$

2-41 $k_{eq}=\frac{(k_1+k_2)k_3}{k_1+k_2+k_3}$

2-43 $k_{eff}=k_1+(a/b)^2k_2$

2-45 等幅度在 $n=3$

第三章

3-2 144%

3-3 $X=1.40$英寸，$\phi=56°30'$

3-5 $\zeta=0.143$

3-7 在图 P.3-7 中要求的是$\frac{w}{3}$（左下，右上）

3-9 (a) $f_n=900$转/分　(b) $\zeta=0.0117$

(c) $X=0.0457$英寸　(d) 178°

3-11 直径为 1″的轴总计 319磅

直径为$\frac{3''}{4}$的轴总计54.4磅

3-13 $t=0.0104$秒

3-15 $X=7.75$英寸

3-17 $\ddot{x}+\frac{g}{l}x=\frac{g}{l}X_0\sin\omega t$.　$h=\frac{l}{1-(X_0/X)}$ 从 m到节点

3-19 $Y=0.0488$英寸

3-22 每个 $k=18.8$磅/英寸

3-24 $X=0.0065$英寸

3-26 $\eta = c\omega/k$

3-28 $(\tau_m/\tau_d)^2 + \zeta^2 = 1$

3-30 $c_s = \frac{1}{2\omega W} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\omega W}\right)^2 - \left(\frac{k - m\omega^2}{\omega}\right)^2}$

$W = W_d/\pi F^2$, W_d = 每个循环损耗的能

3-32 $W_d/U \neq f(X)$时，δ与振幅无关

3-34 $X = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\sqrt{\left(\frac{F}{k}\right)^2 - \left(\frac{4D}{\pi k}\right)^2}$ ，$c_{eq} = \frac{4D}{\pi\omega X}$

第 四 章

4-5 $x = F_0/k(1-\cos\omega_n t) - F_0/k[1-\cos\omega_n(t-t_0)]$, $t > t_0$

4-9 $x(s) = \frac{(s+2\zeta\omega_n)x(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\frac{\dot{x}(0)+\zeta\omega_n x(0)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + x(0)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\}$$

4-10 $z = \frac{100}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) - \frac{20}{\omega_n}\sin\omega_n t$

$$z_{max} = \frac{100}{\omega_n^2}\left(1 - \frac{5}{\sqrt{5^2+\omega_n^2}}\right) - \frac{20}{\sqrt{5^2+\omega_n^2}}$$

4-13 $\tan\omega_n t = \frac{\sqrt{2mgs/k}}{s - mg/2k}$

4-14 $\omega t_0 = 4.52 = 259°$从方程4.4-14，$X_1 = 0.546''$

4-15 $x_{max} = 12.08''$，$t = 0.392$秒

4-22 $x_{max} = 11.65''$

4-33 $\ddot{x} = -2\zeta\omega_n(\dot{x}-\dot{y}) - \omega_n^2(x-y)$

按初始条件 = 0 进行积分

$$\dot{x} = -2\zeta\omega_n(x-y) - \omega_n^2\int(x-y)dt$$

4-34 $x = \frac{F_0 e^{-\zeta\omega_n t}}{c\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \sin^{-1}\sqrt{1-\zeta^2}) - \frac{F_0\cos\omega_n t}{c\omega_n}$

第 五 章

5-2 $\omega_1{}^2 = k/m$ $(X_1/X_2)_1 = 1$

$\omega_1{}^2 = 3k/m$ $(X_1/X_2)_2 = -1$

5-4 $\omega_1{}^2 = 0.573k/m$ $(X_1/X_2)_1 = 3.43$

$\omega_2{}^2 = 4.093k/m$ $(X_1/X_2)_2 = -0.093$

5-6 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K_2(J_1+J_2)}{J_1J_2}}$

5-8 $\omega_n = 15.7$弧度/秒

5-10 $2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2g/l\theta_1 = 0$

$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + g/l\theta_2 = 0$

5-11 $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \dfrac{T}{l} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = 0$

5-13 $\omega_1 = 0.796\sqrt{T/ml}$, $(y_1/y_2)_1 = 1.365$

$\omega_2 = 1.536\sqrt{T/ml}$, $(y_1/y_2)_2 = -0.365$

5-15 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{ml^2}(1 \pm 1)}$ 节拍周期 = 52.3秒

5-17 $x_1 = X(0.500\cos\omega_1 t + 0.500\cos\omega_2 t)$ $\omega_1{}^2 = 0.586g/l$

$x_2 = X(1.207\cos\omega_1 t - 0.207\cos\omega_2 t)$ $\omega_2{}^2 = 3.414g/l$

$(x_1/x_2)_1 = 0.414/1.0$

$(x_1/x_2)_2 = -2.414/1.0$

5-20 $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -kl/4 \\ -kl/4 & (5/16)kl^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\downarrow x$ $\circlearrowleft \theta$

5-22 静力耦合与动力耦合两者都存在。

5-24 $f_1 = 0.963$周/秒 节点在重心前10.9英尺

$f_2 = 1.33$周/秒 节点在重心后1.48英尺

5-26 $\omega_1 = 31.6$弧度/秒　　$(x_1/x_2)_1 = 0.50$

$\omega_2 = 63.4$弧度/秒　　$(x_1/x_2)_2 = -1$

5-29 $x_1 = \frac{8}{9}\cos\omega_1 t + \frac{1}{9}\cos\omega_2 t$

$x_2 = \frac{4}{9}\cos\omega_1 t - \frac{1}{9}\cos\omega_2 t$

5-30 剪切变形比(第一层/第二层) = 2

5-32 $x_1 = \dfrac{2k_1{}^2 X_g \sin\omega t}{(\omega^2 - \frac{1}{2}k_1/m_1)(\omega^2 - 2k_1/m_1)}$,

$x_2 = \dfrac{2k_1(k_1 - \omega^2 m_1)X_g \sin\omega t}{(\omega^2 - \frac{1}{2}k_1/m_1)(\omega^2 - 2k_1 m_1)}$

5-34 $(\omega/\omega_h)_2 = 2.73$, $(Y_1 Y_0)_2 = -0.74$

5-36 $V_1 = 43.3$英尺/秒, $V_2 = 60.3$英尺/秒

5-38 $X_1 = \dfrac{m\omega^2 e[k_2 - M_2\omega^2 + i\omega c]}{[(k_1 + k_2) - M_1\omega^2 + i\omega c][k_2 - M_2\omega^2 + i\omega c] - [k_2 + i\omega c]^2}$

5-41 $d_2 = 1/2''$

5-43 $w = 11.4$磅　　$k = 17.9$磅/英寸

5-45 $\zeta_0 = 0.423$　　$\omega/\omega_n = 0.943$

5-48 $y = \delta_F F + \delta_M M$, $\delta_F = \dfrac{4l^3}{3\times 81EI}$,　$\delta_M = \dfrac{2l^2}{81EI}$

$\theta = \alpha_F F + \alpha_M M$, $\alpha_F = \dfrac{2l^2}{81EI}$,　$\alpha_M = \dfrac{l}{9EI}$

$F = m\omega_1{}^2 y(l/3)$, $M = -(J_p - J_d)\omega\omega_1\theta$

5-50 $\ddot{x} = -40x + 40y$　　　式中 $x = x_1$

$\ddot{y} = 40x - 100y + 60z$　　　$y = x_2$

$Z = 10\sin \pi t$

把方程4.7-6用到原始计算中

$$x(2)=\frac{40}{6}\cdot\frac{60}{6}\quad\frac{Z(2)\Delta t^4}{[1+(40/6)\Delta t^2][1+(100/6)\Delta t^2]}$$

$$y(2)=\frac{1}{[1+(100/6)\Delta t^2]}\left[\frac{40}{6}x(2)+\frac{60}{6}Z(2)\right]\Delta t^2$$

第 六 章

6-1 $$[K]=\begin{pmatrix}(K_1+K_2) & -K_2 & 0\\ -K_2 & (K_2+K_3) & -K_3\\ 0 & -K_3 & K_3\end{pmatrix}$$

$$[a]=[K]^{-1}=\begin{pmatrix}1/K_1 & 1/K_1 & 1/K_1\\ 1/K_1 & (1/K_1+1/K_2) & (1/K_1+1/K_2)\\ 1/K_1 & (1/K_1+1/K_2) & (1/K_1+1/K_2+1/K_3)\end{pmatrix}$$

6-3 $a_{11}=0.0114l^3/EI$

$a_{12}=a_{21}=0.01448l^3/EI$

$a_{22}=0.01920l^3/EI$

6-5 $$[K]=\begin{pmatrix}(k_1+k_2) & -k_2 & 0 & 0 & 0\\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 & 0 & 0\\ 0 & -k_3 & (k_3+k_4) & -k_4 & 0\\ 0 & 0 & -k_4 & (k_4+k_5) & -k_5\cdots\\ \vdots & & & & \vdots\\ & & & & \quad k_n\end{pmatrix}$$

6-6 $$[a]=\begin{pmatrix}1/k_1 & 1/k_1 & 1/k_1 & \cdots\\ 1/k_1 & 1/k_1+1/k_2 & 1/k_1+1/k_2+1/k_3 & \\ 1/k_1 & 1/k_1+1/k_2 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

6-9 $$\begin{pmatrix}J_1 & 0\\ 0 & J_2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+l_2\begin{pmatrix}\frac{9}{16}k_1 & -\frac{9}{16}k_1\\ -\frac{9}{16}k_1 & \left(\frac{9}{16}k_1+\frac{1}{4}k_2\right)\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

式中θ_1↻，θ_2↻

$J_1=ml^2/3 \qquad J_2=7/48ml^2$

6-14 x = 重心坐标，θ○

$$\lambda_1=\frac{\omega_1^2 m}{k}=1.64\quad \begin{Bmatrix}\theta\\x\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}1.44/l\\1.00\end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2=\frac{\omega_2^2 m}{k}=4.10\quad \begin{Bmatrix}\theta\\x\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}-8.40/l\\1.00\end{Bmatrix}$$

$$P'[K]P=\begin{pmatrix}1.92 & 0\\0 & 28.3\end{pmatrix}\qquad [K]=\begin{pmatrix}\frac{5}{16}l^2 & -\frac{1}{4}l\\-\frac{1}{4} & 2\end{pmatrix}$$

6-17 $[K]=\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\qquad [P]=\begin{pmatrix}0.732 & -2.732\\1.00 & 1.00\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\ddot q_1+0.634q_1=0\\ \ddot q_2+2.366q_2=0\end{aligned}\qquad [\widetilde{P}]=\begin{pmatrix}0.732/\sqrt{2.535} & -2.732\sqrt{9.48}\\1/\sqrt{2.535} & 1/\sqrt{9.48}\end{pmatrix}$$

6-20 $\begin{pmatrix}(ms^2+2k) & -k\\-k & (ms^2+2k)\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\bar x_1(s)\\\bar x_2(s)\end{Bmatrix}=$

$$=\begin{Bmatrix}\dfrac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}+msx_1(0)+m\dot x_1(0)\\ msx_2(0)+m\dot x_2(0)\end{Bmatrix}$$

$$\bar x_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}\left(\dfrac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}+msx_1(0)+m\dot x_1(0)\right) & -k\\ msx_2(0)+m\dot x_2(0) & (ms^2+2k)\end{vmatrix}}{m(s^2+k/m)(s^2+3k/m)}$$

6-21 $[K]=k\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$，$[c]=c\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$　∴ 不成比例

6-24 $[A-\lambda I]=\begin{pmatrix}-(\lambda+4) & 0 & 1\\0 & -\lambda & 1\\-10 & -100 & -\lambda\end{pmatrix}$

6-30 $\begin{Bmatrix}\dot z_1\\\dot z_2\end{Bmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & 1\\k/m & c/m\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}z_1\\z_2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\F/m\end{Bmatrix}\sin\omega t$

第七章

7-2 $a_{11}=\dfrac{k_2+k_3}{\Sigma k_i k_j}$，$a_{21}=a_{12}=\dfrac{k_2}{\Sigma k_i k_j}$，$a_{22}=\dfrac{k_1+k_2}{\Sigma k_i k_j}$

7-3 $\omega^2=\dfrac{k}{m}\left(\dfrac{4-6n+5n^2}{1+2n}\right)$，$n=\dfrac{X_2}{X_1}$

7-6 $a_{11}=a_{21}=a_{12}=a_{31}=a_{13}=\dfrac{l_1}{(m_1+m_2+m_3)g}$

$$a_{22}=a_{23}=a_{32}=\frac{l_1}{(m_1+m_2+m_3)g}+\frac{l_2}{(m_2+m_3)g}$$

$$a_{33}=\frac{l_1}{(m_1+m_2+m_3)g}+\frac{l_2}{(m_2+m_3)g}+\frac{l_3}{m_3g}$$

7-11 $\omega=\sqrt{\dfrac{6EI}{Ml^3}\left(1+\dfrac{n}{2}\right)}$； $\dfrac{y_1}{y_2}=-\dfrac{n}{2}$

7-13 $\omega_1=0.00340\sqrt{EI}$

7-15 $\omega_1=0.00374\sqrt{EI}$

7-18 $\omega_1=2.90\sqrt{\dfrac{gEI}{Wl^3}}$

7-20 $f_{11}=498$周/秒

7-23 $\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\dfrac{m\omega^2}{3k}\begin{pmatrix}4&2&1\\4&8&4\\4&8&7\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}$

7-25 $\omega_1=4.93\sqrt{\dfrac{gEI}{Wl^3}}$

7-27 $\omega_1^2=0.705\times10^5$ $\{\theta\}_1=\begin{Bmatrix}1.00\\0.534\\-0.181\\-0.654\end{Bmatrix}$

$\omega_2^2=3.00\times10^5$ $\{\theta\}_2=\begin{Bmatrix}1.00\\-1.00\\-1.00\\0.50\end{Bmatrix}$

7-29 $\theta_1=0.00618$弧度，$\theta_2=-0.000778$弧度，$\theta_3=-0.00338$弧度

7-31 $\theta_1=0.0798$弧度，0°；$\theta_2=0.0558$弧度，0°；$\theta_3=0.0204$弧度，42°；$\theta_4=0.0442$弧度，128°8′

7-33 22.8周/秒

7-34 22.5周/秒；52.5周/秒

7-38 $\omega_1 = 0.537\sqrt{\frac{k}{J}} \quad \{\theta\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.714 \\ 0.239 \\ -0.326 \end{Bmatrix}$

$\omega_2 = 1.27\sqrt{\frac{k}{J}} \quad \{\theta\}_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -0.614 \\ -1.237 \\ 0.1416 \end{Bmatrix}$

$\omega_3 = 1.81\sqrt{\frac{k}{J}} \quad \{\theta\}_3 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -2.27 \\ 1.87 \\ -0.10 \end{Bmatrix}$

7-40 $\omega_1 = 0.585\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$; $\omega_2 = 3.88\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$

7-41 $\omega = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3} + \frac{3}{2}\Omega^2}$

7-43 $\begin{vmatrix} u_{12} & u_{14} \\ u_{32} & u_{34} \end{vmatrix} = 0$

7-46 $\begin{vmatrix} u_{22} & u_{24} \\ u_{42} & u_{44} \end{vmatrix} = 0$

7-49 由方程7.12-14开始

$$\begin{pmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ \varphi \\ T \end{pmatrix} \overset{=}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ V \\ 0 \\ T \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \frac{l^2}{2EI}M_0 + \frac{l^3}{6EI}V_0 \\ \frac{l}{EI}M_0 + \frac{l^2}{2EI}V_0 \\ M_0 + V_0 l \\ V_0 \\ hT_0 \\ T_0 \end{pmatrix}$$

7-58 $\omega_k = 2\sqrt{\frac{K}{J}}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2(2N+1)} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots N$

7-59 $Y_{r+1} - 2\left(1 - \frac{\omega^2 ml}{2T}\right)Y_r + Y_{r-1} = 0$

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{T}{ml}}\ \sin\frac{k\pi}{2(N+1)},\quad k=1,2,3,\cdots N$$

7-63 从 $2\cos\beta\left(N+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} = -\frac{K_N}{k}\sin\beta N$ 找出 β

代入 $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\beta}{2}$

7-65 $m\ddot{y}_n = k(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$ 边界方程式

$m\ddot{y}_N = -k(y_N - y_{N-1} + h\theta)$

$$\sum_{n=1}^{N} nh(m\ddot{y}_n) - K_\theta\theta = (N+1)m\rho^2\ddot{\theta}$$

ρ = 每层地板相对于重心的旋转半径

第八章

8-2 $f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},\ n=1,2,3,\cdots$

8-3 $\tan\frac{\omega l}{c} = \frac{(T/kl)(l/c)}{(mc^2/kl^2)(l/c)^2 - 1}$

8-5 6,600英尺/秒

8-11 $\omega_n = (2n+1)\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Gg}{\rho}},\ n=0,1,2,\cdots$

8-12 $\tan\frac{\omega l}{c} = \frac{2(J_0/J_s)(\omega l/c)}{(J_0/J_s)^2(\omega l/c)^2 - 1}$

8-14 $b = 2/\pi$，节点距端部 $x = 0.219l$ 处

8-16 同两端自由端的杆 f_n 相同

8-18 $\omega = n^2\sqrt{\frac{gEI}{W_b}}$ 式中 n 由 $(1+\cosh nl\cdot\cos nl)$

$$= nl\frac{W_0}{W_a}(\sinh nl\cdot\cos nl - \cosh nl\cdot\sin nl)$$ 定出

8-20 $\tan\omega\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}l = -\omega\frac{I_pG}{K}\sqrt{\frac{\rho}{Gg}}$

第九章

9-3 $K_i = \frac{p_0}{l}\int_0^l \phi_i(x)dx$

9-8 $y(x,t)=\frac{4p_0 l}{\pi M\omega_2^2}\sin\frac{2x\pi}{l}(1-\cos\omega_2 t)$

9-10 第2、第5、第8等振型不出现

9-11 $K=\sqrt{2}\cos(2n-1)\pi/6,\quad D_n=(1-\cos\omega_n t)$

$$u=\frac{2F_0 l}{AE}\Big[\frac{\cos(\pi/6)\cos(\pi/2)(x/l)}{(\pi/2)^2}D_1+$$

$$+\frac{\cos(5\pi/6)\cos(5\pi/2)(x/l)}{(5\pi/2)^2}D_2+\cdots\Big]$$

9-14 $K_1=\frac{1}{l}\int_0^l\phi_1(x)dx=0.784$

$$K_2=\frac{1}{l}\int_0^l\phi_2(x)dx=0.434$$

$$K_3=\frac{1}{l}\int_0^l\phi_3(x)dx=0.254$$

9-19 $\left\{1+\frac{K\varphi'_1{}^2(0)}{M\omega_1^2[1-(\omega/\omega_1)^2]}\right\}\left\{\quad+\frac{K\varphi'_2{}^2(0)}{M\omega_2^2[1-(\omega/\omega_2)^2]}\right\}$

$$=\left\{\frac{K\varphi_1'(0)\varphi_2'(0)}{M\omega_1^2[1-(\omega/\omega_1)^2]}\right\}\left\{\frac{K\varphi_1'(0)\varphi_2'(0)}{M\omega_2^2[1-(\omega/\omega_2)^2]}\right\}$$

$\varphi_1=\sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{l},\quad \varphi_1'=\frac{\pi}{l}\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{l}$，等。

近似振型为

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2=1+\frac{2K}{M\omega_1^2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2,\quad \omega_1=\pi^2\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}$$

9-20 近似振型

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2=1+\frac{4K}{M\omega_1^2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

9-21 利用两端自由的振型和M_0的位移振型：

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2=\frac{M_1}{M_1+M_0\varphi_1^2(0)-[M_0^2\varphi_1^2(0)/(M_0+2ml)]}$$

式中 $M_1=\int\varphi_1^2(x)m\,dx=2ml,\quad \omega_1=22.4\sqrt{\frac{EI}{m(2l)^4}}$

第十章

10-5 $\bar{x}=0.50,\ \bar{x}^2=0.333$

10-6 $\bar{x} = A_0$, $\bar{x^2} = A_0^2 + \frac{1}{2}A_1^2$,

10-8 $f = f_n\sqrt{1 \pm (1/Q)}$

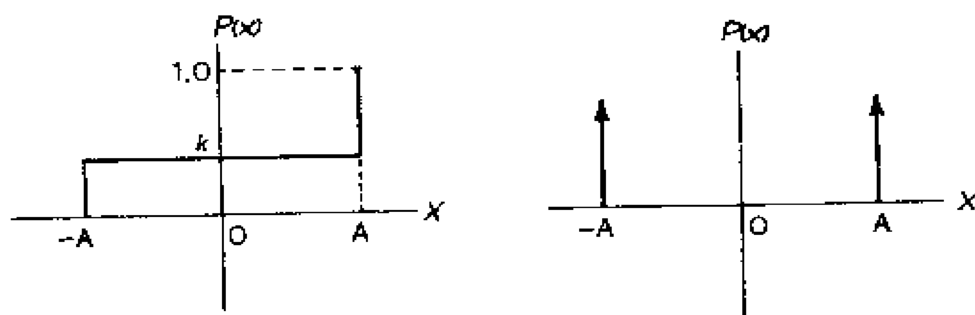
10-10 $\bar{x}(s) = \frac{1}{ms^2 + k(1 + i\gamma)}$

10-14 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi}{\tau}nt$, $b_n = \frac{2}{n\pi}$ n 为奇数

$b_n = -\frac{2}{n\pi}$ n 为偶数

10-16 $f(t) = \frac{2A}{i\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{in\omega_0 t}$ n 为奇数

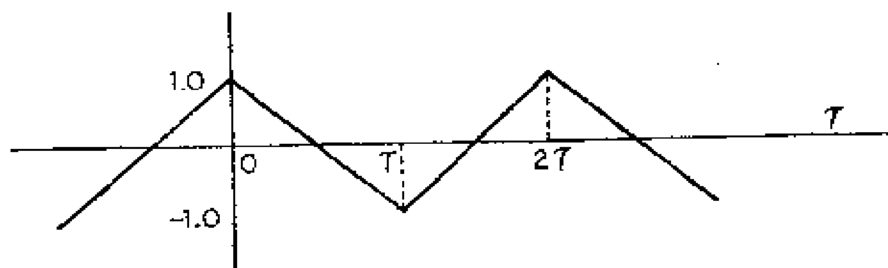
10-20



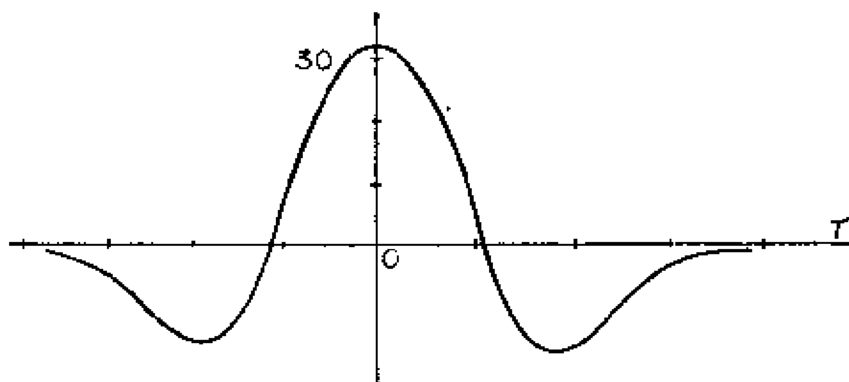
10-21 $\sigma = 1.99$ rms $= 3.60$

10-22 $P[x > 2\sigma] = 4.6\%$ $P[X > 2\sigma] = 13.5\%$

10-24



10-27



第十一章

11-2 $m\ddot{x}+\frac{2T_0}{l_0}x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{EA}{T_0}-1\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]=0$

11-3 $m\ddot{x}+\frac{\pi r_0{}^2\rho}{3(h-x_0)^2}[(h-x)^3-(h-x_0)^3]$

r_0 = 在水线的圆半径

ρ = 重量/排水体积

11-8 $V=\sqrt{y^2+\omega_n{}^4x^2}$　　$x=y=0$处于平衡

11-11 相平面图的原点移到图 11.5-2 的 π 点

11-13 $\lambda_{1,2}=3,4$ $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix} .50 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

11-14 $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}$

11-25 $y=\frac{-x(\omega_n{}^2+\mu x^2)}{c}$　　$c=\frac{dy}{dx}$

11-27 $\frac{dy}{dx}=\frac{-(x+\delta)}{y}$ 式中 $\delta=\left(\frac{c}{m}y+\frac{\mu}{\omega_n{}^2m}x^3\right)$

$$\omega_n{}^2=k/m$$

$$\tau=\omega_nt,\ \ y=\frac{dx}{d\tau}$$

11-30 $\tau=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{60°}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$

式中 $k=\sin\frac{\theta_0}{2}$, $\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\Phi$

11-40

$\tau \cong \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta_0^2\right)$

11-41

11-45 $\ddot{\theta}+\left(-\frac{g}{l}+\frac{4}{l}\omega^2 y_0\cos 2\omega t\right)\theta=0$

名 词 索 引

英 文 汉 译

A

B

Bendat, J.S. 本达特
Bifilar suspension 双点支承
Bilinear hysteresis 双线性滞后
Boundary equations 边界方程
Branched torsional systems 分叉扭转系统
Bretschneider, C.L. 勃勒兹纳德
Brock, J.E. 布罗克
Building vibration 建筑物振动
Butenin, N.V. 布特宁

C

Cantilever beam vibration 悬臂梁振动
Caughey, T.K. 考给
Centrifugal pendulum 离心摆
Characteristic equation 特征方程
Cholesky's inversion 考勒斯基变换
Circular frequency 圆频率
Clarkson, B.L. 克拉克森
Complex algebra 复数代数学
Complex stiffness 复刚度
Component mode synthesis 分部振型综合
Computer flow diagrams 计算机程序流图
Computer program for torsional system 扭振系统计算机程序
Concentrated mass effect on frequency 集中质量对频率的效应
Conjugate complex quantities 共轭复数
Conservation of energy 能量守恒
Conservative nonlinear system 保守的非线性系统
Constrained structures 约束结构
Constraint equations 约束方程
Continuous spectrum 连续频谱
Convolution integral 卷积积分

D

E

F

J

K

L

M

S

T

Timoshenko equation 铁摩森科方程
Torsional damper 扭振阻尼器
Torsional vibration 扭转振动
  with damping 阻尼扭转振动
  Holzer method 扭转振动的霍尔寿法
Trace of a matrix 矩阵的迹
Trajectory of phase plane 相平面轨线
Transducer,seismic 地震仪传感器
Transfer matrices 变换矩阵
  for beams 梁的变换矩阵
  with damping 阻尼变换矩阵
  flexure-torsion 弯曲-扭转变换矩阵
  for rotating beams 旋转梁的变换矩阵
Transient time function 瞬态时间函数
Transmissibility 传递率
Transpose matrix 转置矩阵
Traveling waves 行波
Triangular pulse, digital solution 三角形脉，数字解

U

Unbalance, vibration 振动失衡
Unit step function 单位阶跃函数
Untuned viscous damper 非调谐粘性阻尼

V

Van der Pol equation 范德波尔方程
Variance 方差
Vectors, steady state vibration 稳态振动向量

Vehicle suspension 车辆悬架
Velocity excitation of base 基础的速度激励
Veubeke, B.M.F. 福贝克
Vibration absorber 吸振器
Vibration bounds 振动界限
Vibration damper 振动阻尼器
Vibration isolation 振动隔离
Vibration testing, mass effect 振动试验，质量效应
Virtual work 虚功
Viscoelastic damping 粘弹性阻尼
Viscous damping force 粘性阻尼力
Voigt model 伏依特模型

W

Wave equation 波动方程
Wave velocity 波动速度
Whirling of shafts 轴的弓状旋曲
Wide-band spectral density 宽频带频谱密度
Wiener-kinchin equations 维纳-金兴方程
Work due to damping 阻尼所作的功

Y

Young, D. 扬